〔 最小距離曲線（測地線）としての直線 〕 ※ 外力を受けない粒子に対するラグランジュの運動方程式

概要 ユークリッド空間内の直線は，『指定した２点を結ぶ曲線のうち，その長さが最小になるもの』といえる。以下では，(デカルト座標系も含む) 任意の座標系における **最小距離曲線の方程式** が，**ラグランジュの方程式** と呼ばれる形になることを示す。この数学的な事実は質点の運動方程式において，（慣性座標も含む任意の）一般化座標で現れる≪見かけの力≫がラグランジュの方程式から自動的に導かれることを保証する。

(1) 曲線のパラメータ表示 ※ 以下では，３次元ユークリッド空間上のデカルト座標を (x, y, z) で表す。

始点 P_1 と終点 P_2 を結ぶ曲線 C を考える。いま，曲線 C に沿って単調に増加するパラメータ（目盛り）λ を導入し，曲線 C 上の点を λ の関数とみなす。始点 P_1 で $\lambda = \lambda_1$，終点 P_2 で $\lambda = \lambda_2$ とすると，$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ となる。

$$\begin{cases} \text{曲線 } C \text{ 上の座標値 } x \ : \ x = x(\lambda) \ \to \ \text{微分係数} \ : \ x' \equiv \dfrac{dx(\lambda)}{d\lambda} \quad \text{※ 関数 } w(\lambda) \text{ に対し，} w' \equiv \dfrac{dw(\lambda)}{d\lambda} \text{ とする。} \\ \text{座標値 } x \text{ の微小変化} \ : \ dx \equiv x(\lambda + d\lambda) - x(\lambda) = \dfrac{x(\lambda + d\lambda) - x(\lambda)}{(d\lambda)} \times (d\lambda) \approx \dfrac{dx(\lambda)}{d\lambda}\, d\lambda \equiv x' d\lambda \quad (d\lambda > 0) \end{cases}$$

曲線 C 上の座標値 y と z についても同様に考えると，曲線 C の長さ s は次のように，λ についての積分で表される。

点 (x, y, z) と点 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ のあいだの微小距離：$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

$$\begin{aligned} s &= \int_C ds = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \ : \ \text{積分は微小量 } ds \text{ の，曲線 } C \text{ に沿っての和 (線積分) を表す。} \\ &= \int_C \sqrt{(x' d\lambda)^2 + (y' d\lambda)^2 + (z' d\lambda)^2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\ d\lambda \\ &\equiv \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}\ d\lambda \ : \ \text{ここで，} L_0 \equiv \frac{1}{2}\left\{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right\} \text{ として，} \mathcal{L} \equiv \sqrt{2L_0} \text{ である。} \end{aligned}$$

(2) 一般化座標 ※ 座標 (x, y, z) については，一般化座標のうち特別なものと考えればよい。

曲線 C の長さ s は，座標やパラメータの選択には寄らない。いま，パラメータ λ はそのままで，座標 (x, y, z) の代わりに **一般化座標** $\mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, q_3)$ を用いることを考える。このとき，先に導入した L_0 を一般化座標 $\mathbf{q}$ で書き換えたものを L と表記すると，一般に L は，$\mathbf{q}(\lambda) \equiv \big(q_1(\lambda), q_2(\lambda), q_3(\lambda)\big)$ と $\mathbf{q}'(\lambda) \equiv (q_1', q_2', q_3')$ の関数になる。

$$L_0 = \frac{1}{2}\left\{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx(\mathbf{q})}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy(\mathbf{q})}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz(\mathbf{q})}{d\lambda}\right)^2\right\} \equiv L[\mathbf{q}(\lambda), \mathbf{q}'(\lambda)], \quad \mathcal{L} = \sqrt{2L}$$

(例) 極座標 (r, θ, φ)：$(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \ \to \ L = \dfrac{1}{2}\left\{(r')^2 + r^2(\theta')^2 + r^2\sin^2\theta(\varphi')^2\right\}$

曲線 C の変形は関数の組 $\mathbf{q}(\lambda) = \big(q_1(\lambda), q_2(\lambda), q_3(\lambda)\big)$ の変化で表されるので，以下では s を $s[\mathbf{q}(\lambda)]$ と表記する。

(3) 変分：曲線 C の変形にともなう経路長の変化

曲線 C の始点 $\mathbf{q}(\lambda_1) = \mathbf{q}_1$ と終点 $\mathbf{q}(\lambda_2) = \mathbf{q}_2$ を固定し，途中の経路を微小量 $\delta\mathbf{q}(\lambda) \equiv (\delta q_1(\lambda), \delta q_2(\lambda), \delta q_3(\lambda))$ だけ変化させる。このような曲線 C の微小変形にともなう経路長の微小変化 δs を，$\delta\mathbf{q}(\lambda)$ の１次の精度で計算する。

$$\begin{aligned} \delta s &\equiv s[\mathbf{q}(\lambda) + \delta\mathbf{q}(\lambda)] - s[\mathbf{q}(\lambda)] \ : \ \text{以下では，微小量 } \delta\mathbf{q}(\lambda) \text{ の 2 次以上について，すべて 0 とする。} \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Big\{\mathcal{L}[\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \mathbf{q}' + \delta\mathbf{q}'] - \mathcal{L}[\mathbf{q}, \mathbf{q}']\Big\}\ d\lambda \ : \ \text{ここで，} \delta\mathbf{q}' \equiv \frac{d}{d\lambda}\delta\mathbf{q}(\lambda) = (\delta q_1', \delta q_2', \delta q_3') \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a'}\delta q_a'\right)\ d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a}\delta q_a + \underline{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a'}\frac{d}{d\lambda}\delta q_a}\right)\ d\lambda \ : \ \underline{\text{部分積分をおこなう。}} \\ &= \underline{\sum_{a=1}^{3}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a'}\ \underline{\underline{\delta q_a}}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a} \underline{- \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a'}}\right)\delta q_a\ d\lambda \ : \ \underline{\underline{\delta q_a(\lambda_1) = \delta q_a(\lambda_2) = 0 \ \text{(始点と終点を固定)}}} \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_a'}\right)\delta q_a(\lambda)\ d\lambda \quad \text{※ ≪解析力学≫の\underline{変分原理}にも，類似の式変形が現れる。} \end{aligned}$$

(4) 最小距離曲線としての『直線』の方程式

（i） 1変数関数 $f(x)$ の最小値：極値点を $x=a$，極値を $f(a)$，δx を任意の微小量とする。

$$\delta f(a) \equiv f(a+\delta x) - f(a) = \frac{f(a+\delta x)-f(a)}{(\delta x)} \times (\delta x) \approx \frac{df(a)}{dx}\,\delta x = 0 \ \text{：極値点}\ x=a\ \text{では，}\ \frac{df(a)}{dx}=0$$

$\therefore$ $f(x)$ の極値点 $x=a$ では，任意の微小量 δx に対し，f の微小変化 δf が 0 になる。

※ もし，あらかじめ極値が最小値であることが分かっているならば，$\delta f=0$ となるような x の値を調べれば十分である。

（ii） 1変数関数の場合からの類推

$$\begin{cases} \text{極値条件 ：}\ s[\mathbf{q}(\lambda)]\ \text{が極値をとる条件（※ 必要条件）は，任意関数}\delta\mathbf{q}(\lambda)\ \text{に対し，}\delta s = 0 \\[2ex] s\ \text{の変分 ：}\ \delta s = \displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \sum_{a=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_a} \right) \underline{\underline{\delta q_a(\lambda)}} \right\} d\lambda = 0 \ \leftarrow\ \underline{\underline{\text{任意関数}}} \end{cases}$$

$\therefore$ $a=1\sim 3$ について $\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_a} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0$ でなければ δs の被積分関数が任意関数となり，$\delta s=0$ とはならない。

$$\mathcal{L} = \sqrt{2L}\ \text{より}\ \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \dfrac{d\mathcal{L}}{dL} \times \dfrac{\partial L}{\partial q_a} = \dfrac{1}{\sqrt{2L}}\dfrac{\partial L}{\partial q_a} \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_a} = \dfrac{1}{\sqrt{2L}}\dfrac{\partial L}{\partial q'_a},\quad \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_a} = \dfrac{d}{d\lambda}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2L}}\dfrac{\partial L}{\partial q'_a}\right\} = \left\{\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{1}{\sqrt{2L}}\right\}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_a} + \dfrac{1}{\sqrt{2L}}\left\{\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial L}{\partial q'_a}\right\} \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0 \ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2L}}\left\{\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial q'_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a}\right\} + \left\{\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\sqrt{2L}}\right\}\frac{\partial L}{\partial q'_a} = 0$$

(5) 曲線 C のパラメータ λ の選択

パラメータ λ は曲線 C に便宜的につけられた『目盛り』であるから，曲線 C に沿って単調，かつ滑らかに増加するという条件さえ満たせば，どのように選んでもよい。そこで <u>曲線 C に沿って L が一定</u>，つまり <u>$\dfrac{d}{d\lambda}L=0$</u> となるようなパラメータ λ を選ぶことにする。このとき $\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{1}{\sqrt{2L}}=0$ となるので，最小距離曲線の方程式は次のようになる。

$$L[\mathbf{q},\mathbf{q}'] \equiv \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx(\mathbf{q})}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy(\mathbf{q})}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz(\mathbf{q})}{d\lambda}\right)^2\right\}\ \text{として，}\ \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial q'_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad (a=1\sim 3)$$

※ 実は，この方程式が成り立つとき，条件 $\dfrac{d}{d\lambda}L=0$ は，自動的に満たされている。

曲線 C に沿って L が一定のとき，関数 L を定義する等式 $ds=\mathcal{L}\,d\lambda=\sqrt{2L}\,d\lambda$ より，$\dfrac{ds}{d\lambda}$ が一定となる。したがって，λ の基準点を $\lambda_1=0$ となるように選ぶと，λ は始点 P_1 から測った曲線の長さに比例する。このとき，『曲線 C に沿って，目盛り λ が規則正しく等間隔についている』と考えることができる。

(6) 慣性の法則：『外力を受けない物体は静止，もしくは等速直線運動をする。』

『直線＝最小距離曲線』を外力を受けない物体の軌道とみなすとき，$\dfrac{d}{d\lambda}L=0$ となるパラメータ λ は次のように，『正しい時刻を表示する時計』に対応づけられる。いま，m を（任意の）正定数として『時間座標』を $t=\sqrt{m}\,\lambda$ で定義すると，先の『最小距離曲線の方程式』は，次の『ラグランジュの（運動）方程式』になる。ここで $\dot{\ } \equiv \dfrac{d}{dt}$ である。

$$L[\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}] \equiv \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx(\mathbf{q})}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(\mathbf{q})}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(\mathbf{q})}{dt}\right)^2\right\}\ \text{として，}\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad (a=1\sim 3)$$

このように，『直線（最小距離曲線）に対するラグランジュの方程式』を『慣性の法則』として解釈することができる。このとき，<u>**慣性質量**</u> と呼ばれる正定数 m はすべての項に共通なので，ラグランジュの方程式には関与しない。

<u>**定義**</u>　<u>**広義の空間（多様体）**</u>に <u>**距離（計量）**</u>が定義されているとき，『極値距離曲線』を <u>**測地線**</u> という。

※ 等価原理から測地線仮説へ：重力以外の力を受けない物体は，『４次元時空多様体上の測地線』に沿って運動する。