〔測地線方程式〕

（1） 状況設定

曲線に沿って単調に増加するパラメータを λ とすると，曲線上の位置座標は λ の関数 $x^a(\lambda)$ となる。ここで，時空座標のラベルを表す a, b などの添字は，0 から 3 までの値をとる。いま，$x^a(\lambda)$ の微分を $\dot{x}^a \equiv \dfrac{dx^a(\lambda)}{d\lambda}$, $\ddot{x}^a \equiv \dfrac{d^2x^a(\lambda)}{d\lambda^2} = \dfrac{d\dot{x}^a}{d\lambda}$ のように表記し,『測地線のラグランジュ関数』を $L = \sum_{b,c=0}^{3} \dfrac{1}{2} g_{bc}(x)\dot{x}^b\dot{x}^c$ で与える。ここで，$(x) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ を時空点の座標の組として，$g_{bc}(x) = g_{cb}(x)$ は計量関数である。以下では表記の簡単化のために，例えば $x^a(\lambda)$ を x^a，$g_{bc}(x)$ を g_{bc} のように書くことがある。

（2） 測地線（極値距離曲線）

ラグランジュ関数 L を用いて，曲線上の計量 $(ds_\lambda)^2 = \sum_{b,c=0}^{3}\Big(g_{bc}dx^b dx^c\Big)_{x^a(\lambda)}$ を次のように表す。

$$(ds_\lambda)^2 = \sum_{b,c=0}^{3} g_{bc}\Big(x(\lambda)\Big)\left(\frac{dx^b(\lambda)}{d\lambda}d\lambda\right)\left(\frac{dx^c(\lambda)}{d\lambda}d\lambda\right) = \left(\sum_{b,c=0}^{3} g_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c\right)\times(d\lambda)^2 = 2L(d\lambda)^2$$

いま，L の符号因子を $\epsilon = \begin{cases} -1 & L<0 \\ 0 & L=0 \\ +1 & L>0 \end{cases}$ とすると，曲線上では $|ds_\lambda| = \sqrt{2\epsilon L}\,|d\lambda|$ が成り立つ。区間 $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$ において $L \neq 0$，かつ L の符号が変化しないとき，この曲線区間の長さを $S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left|\dfrac{ds_\lambda}{d\lambda}\right| d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{2\epsilon L}\,d\lambda$ で定義する。このとき，S に極値を与える $x^a(\lambda)$ は，$\sqrt{2\epsilon L}$ に関するオイラー・ラグランジュ方程式の解である。

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial(\sqrt{2\epsilon L})}{\partial\dot{x}^a} - \frac{\partial(\sqrt{2\epsilon L})}{\partial x^a} = 0\ (\epsilon\neq 0,\ L\neq 0)\ \rightarrow\ \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^a} - \frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{1}{2L}\frac{dL}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^a} = 0\ (L\neq 0)$$

（3） アフィン・パラメータ（affine parameter）

曲線上の目盛りにあたるパラメータ λ には,『曲線に沿って単調に増加すること』以外の制約はない。測地線については『目盛りを等間隔につける』と便利であり，これをアフィン・パラメータという。S の式より，単位 λ あたりの曲線の長さは $\sqrt{2\epsilon L}$ であるから，λ がアフィン・パラメータのときは『測地線に沿って L が一定値』になる。

$$\text{≪測地線方程式≫}\quad \begin{cases} L = \displaystyle\sum_{b,c=0}^{3}\frac{1}{2}g_{bc}(x)\dot{x}^b\dot{x}^c & :\ \text{測地線のラグランジュ関数 } L \\ \dfrac{dL}{d\lambda} = 0 & :\ \text{アフィン・パラメータ } \lambda \\ \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}^a} - \dfrac{\partial L}{\partial x^a} = 0 & :\ L \text{ に関するオイラー・ラグランジュ方程式} \end{cases}$$

（4） L に関するオイラー・ラグランジュ方程式に用いる微分公式

※ 微分規則：$\dfrac{\partial x^b}{\partial x^a} = \dfrac{\partial\dot{x}^b}{\partial\dot{x}^a} = \delta^b_a = \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a\neq b)\end{cases}$, $\dfrac{\partial x^b}{\partial\dot{x}^a} = \dfrac{\partial\dot{x}^b}{\partial x^a} = 0$

※ クロネッカーのデルタを含む和の例：$\sum_{b=0}^{3} g_{bc}\delta^b_a = g_{ac}$, $\sum_{a,b=0}^{3} v^a\omega_b\delta^b_a = \sum_{a=0}^{3} v^a\omega_a = \sum_{b=0}^{3} v^b\omega_b$, etc.

$$\sum_{b=0}^{3} g_{bc}\delta^b_a = g_{ac}\text{の導出：}\sum_{b=0}^{3} g_{bc}\delta^b_a = g_{0c}\delta^0_a + g_{1c}\delta^1_a + g_{2c}\delta^2_a + g_{3c}\delta^3_a = \begin{cases} g_{0c} & (a=0\text{ のとき}) \\ g_{1c} & (a=1\text{ のとき}) \\ g_{2c} & (a=2\text{ のとき}) \\ g_{3c} & (a=3\text{ のとき}) \end{cases} = g_{ac}$$

$$※\ \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^a} = \sum_{b,c=0}^{3}\frac{1}{2}g_{bc}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^a}(\dot{x}^b\dot{x}^c) = \frac{1}{2}\sum_{b,c=0}^{3} g_{bc}\left(\delta^b_a\dot{x}^c + \dot{x}^b\delta^c_a\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{3} g_{ac}\dot{x}^c + \sum_{b=0}^{3}\underline{g_{ba}}\dot{x}^b\right) \leftarrow \underline{g_{ba} = g_{ab}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{3} g_{ac}\dot{x}^c + \sum_{b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^b\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^b + \sum_{b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^b\right) = \sum_{b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^b \quad \therefore\ \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^a} = \sum_{b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^b$$

（５）　測地線方程式の数学的構造

ラグランジュ関数 L は λ を陽に含まないので，$L(x,\dot{x},\lambda)$ の微分について，次の公式が得られる。

※ $$\begin{cases} dL=\sum_{a=0}^{3}\dfrac{\partial L}{\partial x^a}dx^a+\sum_{a=0}^{3}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}d\dot{x}^a+\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}d\lambda=\sum_{a=0}^{3}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x^a}dx^a+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}d\dot{x}^a\right) & ：L\text{ の全微分} \\ \dfrac{dL}{d\lambda}=\sum_{a=0}^{3}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x^a}\dfrac{dx^a(\lambda)}{d\lambda}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\dfrac{d\dot{x}^a(\lambda)}{d\lambda}\right)=\sum_{a=0}^{3}\left(\dot{x}^a\dfrac{\partial L}{\partial x^a}+\ddot{x}^a\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) & ：\text{測地線に沿う } L\text{ の方向微分} \end{cases}$$

≪定理≫ $\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}-\dfrac{\partial L}{\partial x^a}=0$ が成り立つときには $\dfrac{dL}{d\lambda}=0$ が自動的に満たされ，λ はアフィン・パラメータとなる。

（証明）　$E=\sum_{a=0}^{3}\dot{x}^a\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}-L$ とすると，以下のように $E=L$，および $\dfrac{dE}{d\lambda}=0$ が成り立つ。

$$E=\sum_{a=0}^{3}\dot{x}^a\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}-L=\sum_{a=0}^{3}\dot{x}^a\cdot\sum_{b=0}^{3}g_{ab}\dot{x}^b-L=\sum_{a,b=0}^{3}g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b-L=2L-L=L$$

$$\frac{dE}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{a=0}^{3}\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}-L\right)=\sum_{a=0}^{3}\left(\frac{d\dot{x}^a}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}+\dot{x}^a\underline{\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}}\right)-\frac{dL}{d\lambda}\qquad ※\ \underline{\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}=\frac{\partial L}{\partial x^a}}$$

$$=\sum_{a=0}^{3}\left(\ddot{x}^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}+\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial x^a}\right)-\sum_{a=0}^{3}\left(\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial x^a}+\ddot{x}^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right)=0$$

≪定理の帰結≫

※ $\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}-\dfrac{\partial L}{\partial x^a}=0$ の解として $x^a(\lambda)$ が得られたならば，$\dfrac{dL}{d\lambda}=0$ を別途，解く必要はない。

※ λ がアフィン・パラメータであるとき，E を積分定数として，測地線に沿って $L=E$ が成り立つ。したがって，L の符号因子 ϵ は変化しない。

※ 測地線の分類：$E>0$ を空間的測地線，$E<0$ を時間的測地線，$E=0$ を光線的（ヌル）測地線という。

（６）　測地線方程式の標準形

※ $$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}=\frac{d}{d\lambda}\sum_{b=0}^{3}g_{ab}\dot{x}^b=\sum_{b=0}^{3}\left\{g_{ab}\frac{d\dot{x}^b}{d\lambda}+\left(\frac{d}{d\lambda}g_{ab}(x)\right)\dot{x}^b\right\}=\sum_{b=0}^{3}\left\{g_{ab}\ddot{x}^b+\left(\sum_{c=0}^{3}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}\frac{dx^c(\lambda)}{d\lambda}\right)\dot{x}^b\right\}$$

$$=\sum_{b=0}^{3}g_{ab}\ddot{x}^b+\sum_{b,c=0}^{3}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}\dot{x}^b\dot{x}^c=\sum_{b=0}^{3}g_{ab}\ddot{x}^b+\sum_{b,c=0}^{3}\left(\partial_c g_{ab}\right)\dot{x}^b\dot{x}^c：\partial_c\equiv\frac{\partial}{\partial x^c}$$

↓添字の役割交換で得られる等式 $\sum_{b,c=0}^{3}\left(\partial_c g_{ab}\right)\dot{x}^b\dot{x}^c=\sum_{c,b=0}^{3}\left(\partial_b g_{ac}\right)\dot{x}^c\dot{x}^b=\sum_{b,c=0}^{3}\left(\partial_b g_{ac}\right)\dot{x}^b\dot{x}^c$ を用いる。

$$=\sum_{b=0}^{3}g_{ab}\ddot{x}^b+\sum_{b,c=0}^{3}\frac{1}{2}\left(\partial_c g_{ab}+\partial_b g_{ac}\right)\dot{x}^b\dot{x}^c$$

※ $$\frac{\partial L}{\partial x^a}=\frac{\partial}{\partial x^a}\sum_{b,c=0}^{3}\frac{1}{2}g_{bc}(x)\dot{x}^b\dot{x}^c=\sum_{b,c=0}^{3}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a}\dot{x}^b\dot{x}^c=\sum_{b,c=0}^{3}\frac{1}{2}\left(\partial_a g_{bc}\right)\dot{x}^b\dot{x}^c$$

≪標準形・その１≫ $$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}-\frac{\partial L}{\partial x^a}=0\to\sum_{b=0}^{3}g_{ab}\ddot{x}^b+\sum_{b,c=0}^{3}\frac{1}{2}\left(\partial_c g_{ab}+\partial_b g_{ac}-\partial_a g_{bc}\right)\dot{x}^b\dot{x}^c=0\qquad(\mathbf{6\text{-}1})$$

※ 一般相対論では計量関数の組 (g_{ab}) が『正則行列』であることを要請し，その逆行列を (g^{ab}) で表す。

逆行列関係：$\det(g_{ab})\neq 0$，かつ $\det(g^{ab})\neq 0\to\sum_{d=0}^{3}g^{ad}g_{db}=\sum_{d=0}^{3}g_{bd}g^{da}=\delta^a_b$　（$g_{ab}=g_{ba}\Longleftrightarrow g^{ab}=g^{ba}$）

≪標準形・その２≫ 恒等式 $\ddot{x}^a=\sum_{b=0}^{3}\delta^a_b\ddot{x}^b=\sum_{b=0}^{3}\left(\sum_{d=0}^{3}g^{ad}g_{db}\right)\ddot{x}^b=\sum_{d=0}^{3}g^{ad}\left(\sum_{b=0}^{3}g_{db}\ddot{x}^b\right)$ を用いる。

$$\ddot{x}^a+\sum_{b,c=0}^{3}\left\{\Gamma^a_{bc}[g]\right\}\dot{x}^b\dot{x}^c\equiv\ddot{x}^a+\sum_{b,c=0}^{3}\left\{\sum_{d=0}^{3}\frac{1}{2}g^{ad}\left(\partial_c g_{db}+\partial_b g_{dc}-\partial_d g_{bc}\right)\right\}\dot{x}^b\dot{x}^c=0\qquad(\mathbf{6\text{-}2})$$