一般相対論における座標系選択の任意性とゲージ変換　※ $\partial_a \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^a}$

1. 用いる座標系を明確に指定しないことに伴うスカラー場のゲージ変換：１次元の場合を例として

※　ここでの『ゲージ変換』では多様体の次元は重要ではないので，１次元の場合を考える。

(a) １次元多様体と座標系

簡単化のため，次の２つの座標系 $\bar{x}$ と $\hat{x}$ のみを考え，これらが共に着目する多様体全体を覆うことができるものとする。なお，場の量はすべて $\bar{x}$ もしくは $\hat{x}$ のみの関数だが，微分記号には偏微分記号を用いることにする。

$$\begin{cases} \text{座標系 } \bar{x} \;:\; -\infty < \bar{x} < +\infty \\ \text{座標系 } \hat{x} \;:\; -\infty < \hat{x} < +\infty \end{cases}$$

※　座標要件

- 多様体上の点とそれぞれの座標系における座標値とのあいだには互いに，１対１の対応関係がある。
- 座標変換の関数 $\bar{x} = \bar{x}(\hat{x})$ と $\hat{x} = \hat{x}(\bar{x})$ が共に C^∞ 級。
- ヤコビ行列について，$\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial \hat{x}} \neq 0$ と $\dfrac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{x}} \neq 0$ が成り立つ。

(b) ゲージ変換が生じる原因

座標系を指定せずに『座標値が x の点』というだけでは，これが『$\bar{x} = x$』と『$\hat{x} = x$』のどちらを意味するのか分からない。もちろん，これは座標系を指定することにより容易に解消されるが，議論に一般性をもたせるなどの理由でいつまでも座標系を指定せずに放置するならば，多様体上の場に対するゲージ変換を考える必要がある。

(c) 無限小座標変換

ϵ を無限小量の定数，$\xi = \bar{\xi}(\bar{x}) = \hat{\xi}(\hat{x})$ を C^∞ 級関数として，$\begin{cases} \bar{x}(\hat{x}) = \hat{x} - \epsilon\xi \\ \hat{x}(\bar{x}) = \bar{x} + \epsilon\xi \end{cases}$ となる場合を考える。

『座標値 x をもつ点』の対応関係：$\begin{cases} \bar{x} = x \;\longleftrightarrow\; \hat{x} = x + \epsilon\xi \\ \hat{x} = x \;\longleftrightarrow\; \bar{x} = x - \epsilon\xi \end{cases}$　(場の無限小ゲージ変換の鍵となる式)

※ $\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial \hat{x}} = 1 - \epsilon \dfrac{\partial \hat{\xi}}{\partial \hat{x}} \\ \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{x}} = 1 + \epsilon \dfrac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} \end{cases}$ より，恒等式 $\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial \hat{x}} \dfrac{\partial \hat{x}}{\partial \bar{x}} = 1$ がϵの１次精度で成り立つための条件は，$\dfrac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} = \dfrac{\partial \hat{\xi}}{\partial \hat{x}} + \mathcal{O}(\epsilon)$

(d) １次元多様体上の微分可能なスカラー場のゲージ変換

微分可能なスカラー場 f の値は座標独立なので，任意の点 p について $f(p) = \bar{f}(\bar{x}_p) = \hat{f}(\hat{x}_p)$ が成り立つ。いま，多様体上の点を『点 p』のように明確に指定せず，単に『座標値 x をもつ点』のようにいうと，**(b)** で述べた理由により，f の値を決めることができない。この現象を以下では，スカラー場 f の『ゲージ不定性 (Gauge Ambiguity)』と呼ぶことにする。

※『座標値 x をもつ点』におけるスカラー場 f のゲージ不定性：$(\Delta f)_x \equiv \bar{f}(x) - \hat{f}(x) \equiv \Big[\bar{f}(\bar{x})\Big]_{\bar{x}=x} - \Big[\hat{f}(\hat{x})\Big]_{\hat{x}=x}$

一般相対論では，上記の $(\Delta f)_x$ をスカラー場 $f(x)$ の『ゲージ変換』と解釈する。一般に，スカラー場は座標変換に対する不変量であるが，ゲージ変換に対する不変量であるとは限らない。

※ スカラー場 f の無限小ゲージ変換：$\hat{f}(\hat{x}) = \bar{f}(\bar{x})$ と (c) での考察より，$\hat{f}(x) = \bar{f}(x - \epsilon\bar{\xi})$

$$\therefore\;\; (\Delta f)_x = \bar{f}(x) - \hat{f}(x) = \bar{f}(x) - \bar{f}(x - \epsilon\bar{\xi}) = \bar{f}(x) - \left\{ \bar{f}(x) - \epsilon\bar{\xi}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}_{\bar{x}=x}$$

$$= \epsilon\xi(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \mathcal{O}(\epsilon^2),\quad \text{ここで } \xi(x) \text{ は任意関数。}$$

※ 最後の等号では x を変数とみなし，$\xi(x) \equiv \bar{\xi}(x) = \hat{\xi}(x) + \mathcal{O}(\epsilon)$，$f(x) \equiv \bar{f}(x) = \hat{f}(x) + \mathcal{O}(\epsilon)$ とした。

(e) n 次元多様体上の微分可能なスカラー場のゲージ変換

１次元での結果の一般化により，スカラー場 f のゲージ変換は次のようになる。

≪スカラー場の無限小ゲージ変換公式≫　$(\Delta f)_x = \epsilon \displaystyle\sum_{c=1}^{n} (\xi^c \partial_c f)_x$，　ここで $\xi^1(x), \cdots, \xi^n(x)$ は任意関数

2. 微分可能なベクトル場のゲージ変換

(a) 多様体が１次元の場合

※ §1-(a) で導入した座標系を用いる。ただし表記の簡略化のため，$A(\bar{x}) \equiv \bar{A}(\bar{x}),\ \xi(\bar{x}) \equiv \bar{\xi}(\bar{x})$ とする。

ベクトル場 $\vec{A}$ の座標成分：$\begin{cases} A(\bar{x}) & \text{in } \bar{x} \\ \hat{A}(\hat{x}) = \dfrac{\partial \hat{x}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} A(\bar{x}) = \left\{1 + \epsilon \dfrac{\partial \xi(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right\} A(\bar{x}) & \text{in } \hat{x} \end{cases}$

$$\therefore \text{無限小ゲージ変換}\ :\ (\Delta A)_x \equiv A(x) - \Big[\hat{A}(\hat{x})\Big]_{\hat{x}=x} = A(x) - \left\{1 + \epsilon \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right\} A(x - \epsilon \xi)$$
$$= \epsilon \left\{ \xi(x) \frac{\partial A(x)}{\partial x} - A(x) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

(b) n 次元多様体上の微分可能なベクトル場のゲージ変換

１次元での結果の一般化により，ベクトル場 $\vec{A}$ のゲージ変換は次のようになる。

≪ベクトル場の無限小ゲージ変換公式≫

$$(\Delta A^a)_x = \epsilon \sum_{c=1}^{n} \Big(\xi^c \partial_c A^a - A^c \partial_c \xi^a \Big)_x \ :\ \xi^1(x), \cdots, \xi^n(x) \text{ は任意関数}$$

(c) ベクトル場の交換子（リー微分）　※ $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} \vec{A} \equiv \Big[\vec{\xi}, \vec{A}\Big] = -\Big[\vec{A}, \vec{\xi}\Big] = -\mathcal{L}_{\vec{A}} \vec{\xi}$：自習課題（4-3）を参照

座標基底 $\vec{e}_a$ が ∂_a であることに留意し，スカラー場 h に作用する微分演算子 $\Big[\vec{\xi}, \vec{A}\Big]$ を定義する。　※ $\vec{e}_a[h] = \partial_a h$

$$\Big[\vec{\xi}, \vec{A}\Big][h] \equiv \vec{\xi}\Big[\vec{A}[h]\Big] - \vec{A}\Big[\vec{\xi}[h]\Big] \equiv \sum_{a,c=1}^{n} \Big\{ \xi^c \partial_c \Big(A^a \partial_a h\Big) - A^c \partial_c \Big(\xi^a \partial_a h\Big) \Big\} = \sum_{a=1}^{n} \left\{ \sum_{c=1}^{n} \Big(\xi^c \partial_c A^a - A^c \partial_c \xi^a \Big) \right\} \vec{e}_a[h]$$

3. 計量関数のゲージ変換　※ ただし，$g_{ab}(\bar{x}) \equiv \bar{g}_{ab}(\bar{x})$ である。

$(\Delta g_{ab})_x \equiv g_{ab}(x) - \Big[\hat{g}_{ab}(\hat{x})\Big]_{(\hat{x})=(x)}$ と $\hat{g}_{ab} = \displaystyle\sum_{c,d=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial \hat{x}^a} \frac{\partial \bar{x}^d}{\partial \hat{x}^b} g_{cd}$ より，次の無限小ゲージ変換公式が得られる。

≪計量関数の無限小ゲージ変換公式≫

$$(\Delta g_{ab})_x = \epsilon \sum_{c=1}^{n} \Big(\xi^c \partial_c g_{ab} + g_{cb} \partial_a \xi^c + g_{ac} \partial_b \xi^c \Big)_x \ :\ \xi^1(x), \cdots, \xi^n(x) \text{ は任意関数}$$

※ これより４次元ミンコフスキー計量 η_{ab} の無限小ゲージ変換公式が再現される。

≪４次元ミンコフスキー計量の無限小ゲージ変換公式≫

$$(\Delta \eta_{ab})_x = \epsilon \sum_{c=0}^{3} \Big(\eta_{cb} \partial_a \xi^c + \eta_{ac} \partial_b \xi^c \Big)_x \ :\ \xi^0(x),\ \xi^1(x),\ \xi^2(x),\ \xi^3(x) \text{ は任意関数}$$

4. 自習課題

(4-1) 次の公式を導け。ここで ∇_c は，計量接続で定義される共変微分演算子である。

$$\Big(\Delta g_{ab}\Big)_x = \epsilon \sum_{c=1}^{n} \Big(\xi^c \partial_c g_{ab} + g_{cb} \partial_a \xi^c + g_{ac} \partial_b \xi^c \Big)_x = \epsilon \Big(\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a \Big), \quad \xi_a \equiv \sum_{b=1}^{n} g_{ab} \xi^b$$

(4-2) (r, s) 型テンソル $\mathbf{A}$ に対する次の無限小ゲージ変換公式を導け。

$$\Big(\Delta A^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s}\Big)_x = \epsilon \sum_{c=1}^{n} \left\{ \xi^c \partial_c A^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} - \sum_{k=1}^{r} A^{a_1 \cdots a_{k-1} c a_{k+1} \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s} \partial_c \xi^{a_k} + \sum_{k=1}^{s} A^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_{k-1} c b_{k+1} \cdots b_s} \partial_{b_k} \xi^c \right\}_x$$

(4-3) 多様体上の『リー微分』について調べ，課題 (4-2) との関連について理解せよ。

※ ベクトル場 $\vec{\xi}$ による (r, s) 型テンソル $\mathbf{A}$ のリー微分を，成分表記で $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} A^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s}$ と表すとき，$\mathbf{A}$ の無限小ゲージ変換について，次の関係式が成り立つ。

≪テンソル場の無限小ゲージ変換公式≫　$\Big(\Delta A^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s}\Big)_x = \epsilon \mathcal{L}_{\vec{\xi}} A^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s}$ ：$\vec{\xi}$は任意のベクトル場