〔一様等方宇宙モデル：膨張宇宙の式とその厳密解の例〕

(1) 一様等方宇宙モデル：曲率定数 K，スケール因子 $a(t)$

一様等方空間が時間 t と共に膨張・収縮をする宇宙モデルは，次の Robertson=Walker 計量で表される。

○計量：$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left\{d\chi^2 + \sigma(\chi)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right\}$ ： $\sigma(\chi) = \dfrac{\sinh(\sqrt{-K}\,\chi)}{\sqrt{-K}}$

$$= -c^2dt^2 + a(t)^2\left\{\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right\} \ :\ r = \sigma(\chi) = \rho\left(1 + \frac{K}{4}\rho^2\right)^{-1}$$

$$= -c^2dt^2 + a(t)^2\left(1 + \frac{K}{4}\rho^2\right)^{-2}\left\{d\rho^2 + \rho^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right\} \ :\ \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= -c^2dt^2 + a(t)^2\left(1 + \frac{K}{4}(x^2+y^2+z^2)\right)^{-2}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \ :\ \text{レポート課題では } K=0$$

○ Ricci テンソル：$\dot a = \dfrac{da}{dt}$，$\ddot a = \dfrac{d^2a}{dt^2}$，$x^0 = ct$，添字 i と j は $1 \sim 3$（空間座標のラベル）

$$R_{00} = -3c^{-2}\frac{\ddot a}{a},\quad R_{ij} = R_{ji} = c^{-2}\left\{\frac{\ddot a}{a} + 2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + 2\frac{Kc^2}{a^2}\right\}g_{ij},\quad R_{0i} = R_{i0} = 0 \qquad ※\ \frac{da}{dx^0} = c^{-1}\dot a,\ \text{etc.}$$

○スカラー曲率：$R = g^{ab}R_{ab} = 6c^{-2}\left\{\dfrac{\ddot a}{a} + \left(\dfrac{\dot a}{a}\right)^2 + \dfrac{Kc^2}{a^2}\right\}$

○ Einstein 方程式

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab} - \Lambda g_{ab}$$ ※ Einstein の宇宙定数項 Λg_{ab} を明記しないことも多い。

$$G_{00} = 3c^{-2}\left\{\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2}\right\},\quad G_{ij} = G_{ji} = -c^{-2}\left\{2\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2}\right\}g_{ij},\quad G_{0i} = G_{i0} = 0$$

$$T_{00} = \varepsilon,\ \ T_{ij} = T_{ji} = Pg_{ij},\ \ T_{0i} = T_{i0} = 0$$

○ Einstein 方程式の (0,0)-成分：$\left(\dfrac{\dot a}{a}\right)^2 + \dfrac{Kc^2}{a^2} = \dfrac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon + \dfrac{\Lambda c^2}{3}$， $\begin{cases}\varepsilon & \text{エネルギー密度}\\ \Lambda & \text{Einstein の宇宙定数}\end{cases}$ ※ **(3)** を参照

○宇宙膨張の加速・減速の式：$\dfrac{\ddot a}{a} = -\dfrac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) + \dfrac{\Lambda c^2}{3}$， P は圧力

(2) Milne 宇宙：$\varepsilon = P = 0$，かつ $\Lambda = 0$ のとき。$K < 0$ の場合にのみ，$\dot a \neq 0$ となる解がある。

$$ds^2 = -c^2t^2 + \left(-Kc^2t^2\right)\left\{\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right\},\quad t > 0$$

$\downarrow$ 座標変換 $\begin{cases}\bar t = t\sqrt{1-Kr^2}\\ \bar r = ct\sqrt{-Kr^2}\end{cases}$ により，時空領域の拡張が可能

$= -c^2d\bar t^2 + d\bar r^2 + \bar r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ ： Minkowski 時空の極座標表示

$\therefore$ Milne 宇宙は，Minkowski 時空内の領域 $c^2\bar t^2 - \bar r^2 = c^2t^2 > 0$ を表す。

座標変換から得られる関係式 $u(r) \equiv \dfrac{\bar r}{\bar t} = c\sqrt{\dfrac{-Kr^2}{1-Kr^2}}$ より，Milne 宇宙の空間座標 (r, θ, φ) に対して静止する『共動観測者』は，Minkowski 時空内では，速さ $u(r)$ で $\bar r$ 方向に等速直線運動をする。

※ Milne 宇宙における座標特異点 $t = 0$（$a = 0$）は $c^2\bar t^2 - \bar r^2 = 0$，すなわち $u(r) = c$ に対応する。

(3)　Einstein の静的宇宙：$\dot{a}=0$, かつ $\ddot{a}=0$ を要請する。

○ $\ddot{a}=0 \ \to \ \Lambda=\dfrac{4\pi G}{c^4}(\varepsilon+3P)$ ：通常の物質では $\varepsilon+3P>0$ 　$\therefore$ 正の宇宙定数 Λ が必要

○ $\dot{a}=0 \ \to \ \dfrac{K}{a^2}=\dfrac{8\pi G}{3c^4}\varepsilon+\dfrac{\Lambda}{3}=\dfrac{4\pi G}{c^4}(\varepsilon+P)>0$（正曲率空間）　$\therefore$ 宇宙の体積は有限：$V=2\pi^2a^3K^{-\frac{3}{2}}$

(4)　de Sitter 時空：$\varepsilon=P=0$, かつ $\Lambda>0$ のとき。　※ 以下において，$H_\Lambda=\sqrt{\dfrac{|\Lambda|c^2}{3}}>0$ とする。

※ 任意の K の値についてそれぞれ解があり，どの解においても，$\ddot{a}=(H_\Lambda)^2a>0$（『加速』する。）

○ $K>0$ のとき：$a(t)=\dfrac{c}{H_\Lambda}\sqrt{K}\cosh(H_\Lambda t)\quad(-\infty<t<\infty)$

○ $K<0$ のとき：$a(t)=\dfrac{c}{H_\Lambda}\sqrt{|K|}\sinh(H_\Lambda t)\quad(0<t<\infty)$

○ $K=0$ のとき：$a(t)=a(0)\,\mathrm{e}^{H_\Lambda t}\quad(-\infty<t<\infty)$

$$ds^2=-c^2dt^2+a(0)^2\mathrm{e}^{2H_\Lambda t}\Big\{dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\Big\}\ :\ \bar{t}=H_\Lambda t,\ \bar{r}=\frac{H_\Lambda}{c}a(0)r>0 \text{ とする。}$$

$$=\left(\frac{c}{H_\Lambda}\right)^2\left[-d\bar{t}^2+\mathrm{e}^{2\bar{t}}\Big\{d\bar{r}^2+\bar{r}^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\Big\}\right]\ :\ \begin{cases}\hat{t}=\bar{t}-\dfrac{1}{2}\log\left(1-\bar{r}^2\mathrm{e}^{2\bar{t}}\right)\\ \hat{r}=\bar{r}\mathrm{e}^{\bar{t}}>0\end{cases} \text{ とする。}$$

$$=\left(\frac{c}{H_\Lambda}\right)^2\left\{-\left(1-\hat{r}^2\right)d\hat{t}^2+\frac{d\hat{r}^2}{1-\hat{r}^2}+\hat{r}^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right\}\ :\text{座標特異点 }\hat{r}=1\text{ は『地平面』}$$

$\therefore K=0$ のとき，解は静的。　※ $\dfrac{\partial g_{ab}}{\partial x^0}=0\ (x^0=\hat{t})$, かつ $g_{0i}=0\ (i=1\sim 3)$ となる座標領域をもつ。

○定曲率時空：曲率テンソルを (2,2) 型で表すと，曲率定数 K を含まない不変テンソルになる。

$$R^{ab}{}_{cd}=\left(\frac{H_\Lambda}{c}\right)^2\left(\delta^a_c\delta^b_d-\delta^a_d\delta^b_c\right),\quad R\equiv R^{ab}{}_{ab}=12\left(\frac{H_\Lambda}{c}\right)^2>0:\text{正曲率時空}$$

$$\therefore\begin{cases}R^{a'b'}{}_{c'd'}=R^{ab}{}_{cd} & :\ \text{一般座標変換に対する不変テンソル}\\ \nabla_eR^{ab}{}_{cd}=0 & :\ \text{共変微分に関する定テンソル}\end{cases}$$

○適当な座標変換により，$K\leq 0$ の計量が $K>0$ の計量（完全チャート）の形になることが示される。

(5)　反 de Sitter 時空（Anti-de Sitter Spacetime）：$\varepsilon=P=0$, かつ $\Lambda<0$ のとき。

○ $K<0$ の場合にのみ，解がある。　※ $H_\Lambda=\sqrt{\dfrac{|\Lambda|c^2}{3}}=\sqrt{\dfrac{-\Lambda c^2}{3}}>0$ とする。

○ $a(t)=\dfrac{c}{H_\Lambda}\sqrt{|K|}\sin(H_\Lambda t)\to\ddot{a}=-(H_\Lambda)^2a<0$（『減速』する。）

○ $R^{ab}{}_{cd}=-\left(\dfrac{H_\Lambda}{c}\right)^2\left(\delta^a_c\delta^b_d-\delta^a_d\delta^b_c\right)$：一般座標変換に対する不変テンソル，かつ共変微分に対する定テンソル

○ $R=-12\left(\dfrac{H_\Lambda}{c}\right)^2<0$：負曲率時空

○完全チャート：de Sitter 時空の場合と同様に，適当な座標変換により静的計量が得られる。

$$ds^2=\left(\frac{c}{H_\Lambda}\right)^2\left\{-\left(1+\hat{r}^2\right)d\hat{t}^2+\frac{d\hat{r}^2}{1+\hat{r}^2}+\hat{r}^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right\}\ :\ 0<\hat{r}<\infty\quad\text{※ }\hat{r}=0\text{ は極座標の特異点}$$