アインシュタイン方程式の解を求める手順　～シュバルツシルト解を例として～

1.　時空の対称性による計量関数への制限

アインシュタイン方程式はその複雑さのため，一般解を求めるのは不可能である。したがって，簡単化された状況下で求められた特解の性質から，アインシュタイン方程式の解の一般的な性質を類推することがある。特解を求める際におこなわれる“状況の簡単化”の一例が，時空に『対称性』という制約を課すことである。

(a)　定常時空　：適当な座標変換で計量関数 g_{ab} が時間座標 x^0 を含まないようにできるとき，定常時空という。

- 計量： $ds^2 = \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab} dx^a dx^b$,　ここで　$\dfrac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} = 0$　かつ　$g_{00} < 0$

※　g_{ab} が x^0 を含まないので，$\sum_{i=1}^{3} g_{0i} dx^0 dx^i$ の形の項は，時間反転（変換：$x^0 \to -x^0$）の対称性を破る。

(b)　静的時空　：定常時空における **(a)** の座標系で，さらに $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ とできるとき，静的時空という。

- 計量： $ds^2 = g_{00}\,(dx^0)^2 + \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dx^i dx^j$,　ここで　$\dfrac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} = 0$　かつ　$g_{00} < 0$

※　g_{ab} が x^0 を含まないので，定常性に加えて時間反転（変換：$x^0 \to -x^0$）の対称性をもつ。

(c)　球対称時空　：適当な座標系 $(\xi \equiv ct, \rho, \theta, \phi)$ を用いて計量を次の形にできるとき，球対称時空という。

- 計量： $ds^2 = -\mathcal{A}(\xi,\rho)\, d\xi^2 + \mathcal{B}(\xi,\rho)\, d\rho^2 + \mathcal{C}(\xi,\rho)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$

※　$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ は単位球面上の計量である。

単位球面 S（$x^2 + y^2 + z^2 = 1$）：$x = \sin\theta\cos\phi$,　$y = \sin\theta\sin\phi$,　$z = \cos\theta$

$$
\begin{aligned}
d\Omega^2 &= \Big((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \Big)_{\text{on } S} \\
&= (\cos\theta\cos\phi\, d\theta - \sin\theta\sin\phi\, d\phi)^2 + (\cos\theta\sin\phi\, d\theta + \sin\theta\cos\phi\, d\phi)^2 + (-\sin\theta\, d\theta)^2 \\
&= d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 \qquad (0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi)
\end{aligned}
$$

2.　状況の簡単化と座標の選択　～シュバルツシルト解の場合～

(a)　時空の対称性　：時空は静的かつ球対称

- 計量： $ds^2 = -A(\rho)\, d\xi^2 + B(\rho)\, d\rho^2 + C(\rho)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$

(b)　真空解　：すべての時空点で，物質場を表すエネルギー・運動量テンソルが 0　($T_{ab} = 0$)

- アインシュタイン方程式：
$$
\begin{cases}
\cdot\ G_{ab} \equiv R_{ab} - \dfrac{R}{2} g_{ab} = \dfrac{8\pi G}{c^4} T_{ab} & \text{：アインシュタイン方程式} \\
\cdot\ R_{ab} = \dfrac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ab} - \dfrac{1}{2} T^c{}_c g_{ab} \right) & \text{：変形されたアインシュタイン方程式} \\
\cdot\ T_{ab} = 0 \iff R_{ab} = 0 \iff G_{ab} = 0 & \text{：同値関係}
\end{cases}
$$

(c)　座標の選択

- 座標変換 $\rho \to r \equiv \sqrt{C(\rho)}$ をおこなう。このとき，ρ を r の関数 $\rho(r)$ とみなす。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -A(\rho)\, d\xi^2 + B(\rho)\, d\rho^2 + C(\rho)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \\
&= -A\Big(\rho(r)\Big)\, d\xi^2 + B\Big(\rho(r)\Big) \left(\frac{d\rho(r)}{dr} dr \right)^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \\
&= -\underline{A\Big(\rho(r)\Big)}\, d\xi^2 + \underline{\underline{B\Big(\rho(r)\Big) \left(\frac{d\rho(r)}{dr} \right)^2}}\, dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \\
&\equiv -\underline{f(r)}\, d\xi^2 + \underline{\underline{h(r)}}\, dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)
\end{aligned}
$$

※　静的球対称時空の計量は，動径座標の変換の自由度を用いると，２つの未知関数 $f(r)$ と $h(r)$ で表される。

3. 具体的な計算手順　※ 以下では，$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (\xi, r, \theta, \phi)$ とする。また，$x^1 \equiv r$ に関する微分を $'$ で表す。

(a) 計量関数の行列表示 (g_{ab}) とその逆行列 (g^{ab})

※ 微分の計算を容易にするために，以下では計量関数を $f(r) = \mathrm{e}^{2\mu(r)}$，$h(r) = \mathrm{e}^{2\lambda(r)}$ のように表す。

※ n 次正方行列 A が対角行列（対角成分以外はすべて 0）の場合，$A = \mathrm{diag}\,(A_{11}, \cdots, A_{nn})$ のように表記する。

・ $(g_{ab}) = \mathrm{diag}\left(-\mathrm{e}^{2\mu},\ \mathrm{e}^{2\lambda},\ r^2,\ r^2\sin^2\theta\right) \longrightarrow$ 逆行列は $(g^{ab}) = \mathrm{diag}\left(-\mathrm{e}^{-2\mu},\ \mathrm{e}^{-2\lambda},\ \dfrac{1}{r^2},\ \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)$

(b) 接続係数　※ $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{d=0}^{3} g^{cd}\left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right)$，$\partial_0 g_{ab} = \partial_3 g_{ab} = 0$ （静的球対称）

・ $\Gamma^0_{ab} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{d=0}^{3} g^{0d}\left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right) = \dfrac{1}{2}g^{00}\left(\partial_a g_{b0} + \partial_b g_{a0} - \partial_0 g_{ab}\right) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mu}\left(\partial_a g_{b0} + \partial_b g_{a0}\right)$

$\therefore\ \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mu}\partial_1 g_{00} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mu}\partial_1\left(-\mathrm{e}^{2\mu}\right) = \mu' \equiv \dfrac{d\mu}{dr}$ （他の Γ^0_{ab} はすべて 0）

・ $\Gamma^1_{ab} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{d=0}^{3} g^{1d}\left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right) = \dfrac{1}{2}g^{11}\left(\partial_a g_{b1} + \partial_b g_{a1} - \partial_1 g_{ab}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\partial_a g_{b1} + \partial_b g_{a1} - \partial_1 g_{ab}\right)$

$$\therefore\ \begin{cases} \Gamma^1_{00} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1 g_{00} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1\left(-\mathrm{e}^{2\mu}\right) = \mu'\mathrm{e}^{2\mu-2\lambda} \\ \Gamma^1_{11} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1 g_{11} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1\left(\mathrm{e}^{2\lambda}\right) = \lambda' \\ \Gamma^1_{22} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1 g_{22} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1\left(r^2\right) = -r\mathrm{e}^{-2\lambda} \\ \Gamma^1_{33} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1 g_{33} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda}\partial_1\left(r^2\sin^2\theta\right) = -r\mathrm{e}^{-2\lambda}\sin^2\theta \end{cases}$$

（他の Γ^1_{ab} はすべて 0）

・ $\Gamma^2_{ab} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{d=0}^{3} g^{2d}\left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right) = \dfrac{1}{2}g^{22}\left(\partial_a g_{b2} + \partial_b g_{a2} - \partial_2 g_{ab}\right) = \dfrac{1}{2r^2}\left(\partial_a g_{b2} + \partial_b g_{a2} - \partial_2 g_{ab}\right)$

$$\therefore\ \begin{cases} \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{2r^2}\partial_1 g_{22} = \dfrac{1}{2r^2}\partial_1\left(r^2\right) = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma^2_{33} = -\dfrac{1}{2r^2}\partial_2 g_{33} = -\dfrac{1}{2r^2}\partial_2\left(r^2\sin^2\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

（他の Γ^2_{ab} はすべて 0）

・ $\Gamma^3_{ab} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{d=0}^{3} g^{3d}\left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right) = \dfrac{1}{2}g^{33}\left(\partial_a g_{b3} + \partial_b g_{a3} - \partial_3 g_{ab}\right) = \dfrac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left(\partial_a g_{b3} + \partial_b g_{a3}\right)$

$$\therefore\ \begin{cases} \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \dfrac{1}{2r^2\sin^2\theta}\partial_1 g_{33} = \dfrac{1}{2r^2\sin^2\theta}\partial_1\left(r^2\sin^2\theta\right) = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \dfrac{1}{2r^2\sin^2\theta}\partial_2 g_{33} = \dfrac{1}{2r^2\sin^2\theta}\partial_2\left(r^2\sin^2\theta\right) = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \end{cases}$$

（他の Γ^3_{ab} はすべて 0）

(c) リーマン曲率　※ $R^a{}_{bcd} = \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \displaystyle\sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}$，$\partial_0\Gamma^c_{ab} = \partial_3\Gamma^c_{ab} = 0$ （静的球対称）

・ $R^0{}_{101} = \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1\Gamma^0_{10} + \displaystyle\sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{11}\Gamma^0_{e0} - \sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{10}\Gamma^0_{e1} = -\partial_1\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^0_{10} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} = -\mu'' + \lambda'\mu' - (\mu')^2$

・ $R^0{}_{202} = \partial_0\Gamma^0_{22} - \partial_2\Gamma^0_{20} + \displaystyle\sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{22}\Gamma^0_{e0} - \sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{20}\Gamma^0_{e2} = \Gamma^1_{22}\Gamma^0_{10} = -r\mu'\mathrm{e}^{-2\lambda}$

・ $R^0{}_{303} = \partial_0\Gamma^0_{33} - \partial_3\Gamma^0_{30} + \displaystyle\sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{33}\Gamma^0_{e0} - \sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{30}\Gamma^0_{e3} = \Gamma^1_{33}\Gamma^0_{10} = -r\mu'\mathrm{e}^{-2\lambda}\sin^2\theta$

・ $R^2{}_{121} = \partial_2\Gamma^2_{11} - \partial_1\Gamma^2_{12} + \displaystyle\sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{11}\Gamma^2_{e2} - \sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{12}\Gamma^2_{e1} = \underline{-\partial_1\Gamma^2_{12}} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \underline{\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21}} = \dfrac{\lambda'}{r}$ ： 下線部 $= \dfrac{1}{r^2}$

・ $R^3{}_{131} = \partial_3\Gamma^3_{11} - \partial_1\Gamma^3_{13} + \displaystyle\sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{11}\Gamma^3_{e3} - \sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{13}\Gamma^3_{e1} = \underline{-\partial_1\Gamma^3_{13}} + \Gamma^1_{11}\Gamma^3_{13} - \underline{\Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31}} = \dfrac{\lambda'}{r}$ ： 下線部 $= \dfrac{1}{r^2}$

・ $R^3{}_{232} = \partial_3\Gamma^3_{22} - \partial_2\Gamma^3_{23} + \displaystyle\sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{22}\Gamma^3_{e3} - \sum_{e=0}^{3}\Gamma^e_{23}\Gamma^3_{e2} = \underline{-\partial_2\Gamma^3_{23}} + \Gamma^1_{22}\Gamma^3_{13} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32}$ ： $\underline{\dfrac{d}{d\theta}\cot\theta} = -\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin^2\theta} - \mathrm{e}^{-2\lambda} - \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}$

(d) 変形されたリーマン曲率 ： $\boldsymbol{R^{ab}{}_{cd} \equiv g^{be} R^{a}{}_{ecd} = g^{af} g^{be} R_{fecd}}$

※ $R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{badc}$ より，$R^{ab}{}_{cd} = -R^{ba}{}_{cd} = -R^{ab}{}_{dc} = R^{ba}{}_{dc}$ が成り立つ。

- $R^{01}{}_{01} = R^{10}{}_{10} = \displaystyle\sum_{e=0}^{3} g^{1e} R^{0}{}_{e01} = g^{11} R^{0}{}_{101} = \left(-\mu'' + \mu'\lambda' - (\mu')^2\right) \mathrm{e}^{-2\lambda}$
- $R^{02}{}_{02} = R^{20}{}_{20} = \displaystyle\sum_{e=0}^{3} g^{2e} R^{0}{}_{e02} = g^{22} R^{0}{}_{202} = \frac{1}{r^2} \cdot \left(-r\mu' \mathrm{e}^{-2\lambda}\right) = -\frac{\mu'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda}$
- $R^{03}{}_{03} = R^{30}{}_{30} = \displaystyle\sum_{e=0}^{3} g^{3e} R^{0}{}_{e03} = g^{33} R^{0}{}_{303} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \left(-r\mu' \mathrm{e}^{-2\lambda} \sin^2\theta\right) = -\frac{\mu'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda}$
- $R^{21}{}_{21} = R^{12}{}_{12} = \displaystyle\sum_{e=0}^{3} g^{1e} R^{2}{}_{e21} = g^{11} R^{2}{}_{121} = \frac{\lambda'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda}$
- $R^{31}{}_{31} = R^{13}{}_{13} = \displaystyle\sum_{e=0}^{3} g^{1e} R^{3}{}_{e31} = g^{11} R^{3}{}_{131} = \frac{\lambda'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda}$
- $R^{32}{}_{32} = R^{23}{}_{23} = \displaystyle\sum_{e=0}^{3} g^{2e} R^{3}{}_{e32} = g^{22} R^{3}{}_{232} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}\right)$

※ $R^{01}{}_{02}$や $R^{12}{}_{30}$ のように（$0 \sim 3$ のうち）3 種類以上の成分添字をもつものは，すべて 0 になる。

※ 一般の（静的でない）球対称時空でも，$R^{02}{}_{02} = R^{03}{}_{03}$と $R^{12}{}_{12} = R^{13}{}_{13}$ が成り立つ。

(e) 変形されたリッチ・テンソル ： $\boldsymbol{R^{b}{}_{d} \equiv R^{ab}{}_{ad} = R^{ba}{}_{da}}$

- $R^{0}{}_{0} = R^{10}{}_{10} + R^{20}{}_{20} + R^{30}{}_{30} = \left(-\mu'' + \mu'\lambda' - (\mu')^2 - \dfrac{2}{r}\mu'\right) \mathrm{e}^{-2\lambda}$
- $R^{1}{}_{1} = R^{01}{}_{01} + R^{21}{}_{21} + R^{31}{}_{31} = \left(-\mu'' + \mu'\lambda' - (\mu')^2 + \dfrac{2}{r}\lambda'\right) \mathrm{e}^{-2\lambda}$
- $R^{2}{}_{2} = R^{02}{}_{02} + R^{12}{}_{12} + R^{32}{}_{32} = -\dfrac{\mu'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda} + \dfrac{\lambda'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda} + \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{r^2} = \dfrac{1}{r^2} - \left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\mu' - \lambda'}{r}\right) \mathrm{e}^{-2\lambda} = R^{3}{}_{3}$
- $R^{3}{}_{3} = R^{03}{}_{03} + R^{13}{}_{13} + R^{23}{}_{23} = -\dfrac{\mu'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda} + \dfrac{\lambda'}{r} \mathrm{e}^{-2\lambda} + \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{r^2} = \dfrac{1}{r^2} - \left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\mu' - \lambda'}{r}\right) \mathrm{e}^{-2\lambda} = R^{2}{}_{2}$

※ 静的球対称時空では，$R^{a}{}_{b}$ の非対角成分（$a \neq b$）は，すべて 0 になる。

(f) アインシュタイン方程式とその解 ： $\boldsymbol{T^{a}{}_{b} = 0}$（真空解） $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{R^{a}{}_{b} = 0}$

- $0 = R^{1}{}_{1} - R^{0}{}_{0} = \dfrac{2}{r}(\lambda' + \mu')\mathrm{e}^{-2\lambda}$ 　　$\therefore$ $\dfrac{d}{dr}\Big\{\lambda(r) + \mu(r)\Big\} = 0 \longrightarrow \lambda(r) + \mu(r) = \alpha$ （α は積分定数）
- $0 = \Big[R^{2}{}_{2}\Big]_{\mu(r) = \alpha - \lambda(r)} = \dfrac{1}{r^2} \cdot \Big\{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} + 2r\lambda' \mathrm{e}^{-2\lambda}\Big\} = \dfrac{1}{r^2} \cdot \left\{\dfrac{d}{dr} r - \left(\dfrac{d}{dr} r\right) \cdot \mathrm{e}^{-2\lambda(r)} - r \cdot \dfrac{d}{dr}\left(\mathrm{e}^{-2\lambda(r)}\right)\right\}$
$= \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{d}{dr}\left(r - r\mathrm{e}^{-2\lambda(r)}\right)$ 　　$\therefore$ $\dfrac{d}{dr}\left(r - r\mathrm{e}^{-2\lambda(r)}\right) = 0 \longrightarrow r - r\mathrm{e}^{-2\lambda(r)} = r_g$ （r_gは積分定数）

$\therefore$ **計量関数** $\begin{cases} h(r) = \mathrm{e}^{2\lambda(r)} = \left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)^{-1} \\ f(r) = \mathrm{e}^{2\mu(r)} = \mathrm{e}^{2\alpha - 2\lambda(r)} = \left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right) \mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$ （αと r_gは積分定数）

※ 上記の $\mu(r)$ と $\lambda(r)$ により $R^{1}{}_{1} + R^{0}{}_{0} = 0$ が満たされることは，代入による直接計算で確認される。

(g) 境界条件とシュバルツシルト解

≪境界条件（要請）≫ 遠方（$r \gg |r_g|$）では，質量 M の質点を重力源とする**ニュートン的計量**になる。

$$\begin{cases} \cdot\ ds^2 = -\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right) \mathrm{e}^{2\alpha} c^2 dt^2 + \cdots & ：\textbf{静的かつ球対称な真空解} \quad ※\ d\xi = c\,dt\ \text{とした。} \\ \cdot\ ds^2 = -\left(1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \cdots & ：\textbf{ニュートン的計量} \end{cases}$$

$\therefore$ $\alpha = 0$, $r_g = \dfrac{2GM}{c^2} > 0$ （r_gを**重力半径**，あるいは**シュバルツシルト半径**という。）

4. シュバルツシルト解の時空構造

(a) シュバルツシルト時空の計量

$$\begin{cases} \cdot\ ds^2 = -\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \\ \cdot\ r_g \equiv \dfrac{2GM}{c^2} \approx 3\left(\dfrac{M}{M_\odot}\right)\mathrm{km}, \quad M_\odot \approx 2\times 10^{30}\mathrm{kg}\text{は太陽質量} \end{cases}$$

※ 時間座標 t と動径座標 r の組 (t,r) を**シュバルツシルト座標**という。

(b) リーマン曲率と曲率不変量

・ $$\begin{cases} \mathrm{e}^{-2\lambda} = 1-\dfrac{r_g}{r} \\ \mu = -\lambda \end{cases} \to \begin{cases} R^{32}{}_{32} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2\lambda}}{r^2} = \dfrac{1}{r^2}\cdot\left\{1-\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)\right\} = \dfrac{r_g}{r^3} \\ R^{21}{}_{21} = R^{31}{}_{31} = \dfrac{\lambda'}{r}\mathrm{e}^{-2\lambda} = -\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(\mathrm{e}^{-2\lambda}\right) = -\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right) = -\dfrac{r_g}{2r^3} \\ R^{02}{}_{02} = R^{03}{}_{03} = -\dfrac{\mu'}{r}\mathrm{e}^{-2\lambda} = \dfrac{\lambda'}{r}\mathrm{e}^{-2\lambda} = -\dfrac{r_g}{2r^3} \end{cases}$$

・ $$0 = R^1{}_1 = \sum_{a=0}^{3} R^{a1}{}_{a1} = R^{01}{}_{01} + R^{21}{}_{21} + R^{31}{}_{31} \ \to\ R^{01}{}_{01} = -R^{21}{}_{21} - R^{31}{}_{31} = \frac{r_g}{r^3}$$

・ **曲率不変量：**$I \equiv \displaystyle\sum_{a,b,c,d=0}^{3} R^{ab}{}_{cd}R^{cd}{}_{ab}$ は，座標変換に対する不変量（スカラー）

添字の対称性・反対称性（$R^{ab}{}_{cd} = -R^{ab}{}_{dc} = -R^{ba}{}_{cd} = R^{ba}{}_{dc}$）より，

$$\begin{aligned} I &= 4\left(R^{01}{}_{01}\right)^2 + 4\left(R^{02}{}_{02}\right)^2 + 4\left(R^{03}{}_{03}\right)^2 + 4\left(R^{21}{}_{21}\right)^2 + 4\left(R^{31}{}_{31}\right)^2 + 4\left(R^{32}{}_{32}\right)^2 \\ &= 4\cdot\left(\frac{r_g}{r^3}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{r_g}{2r^3}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{r_g}{2r^3}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{r_g}{2r^3}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{r_g}{2r^3}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{r_g}{r^3}\right)^2 \\ &= 12\frac{(r_g)^2}{r^6} \qquad \therefore \begin{cases} \lim\limits_{r\to r_g} I = \dfrac{12}{(r_g)^4} & \text{（有限値）} \\ \lim\limits_{r\to 0} I \to +\infty & \text{（無限大）} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) シュバルツシルト座標 $(t,\ r)$ の特異点

$$\begin{cases} \cdot\ \lim\limits_{r\to 0}|g_{tt}(r)| = \lim\limits_{r\to 0}\left|c^2 - \dfrac{r_g c^2}{r}\right| \to \infty & \underline{\text{曲率特異点}}\text{： 座標変換による除去が不可能な}\textbf{真の特異点} \\ \cdot\ \lim\limits_{r\to r_g}\left|g_{rr}(r)\right| = \lim\limits_{r\to r_g}\left|1-\dfrac{r_g}{r}\right|^{-1} \to \infty & \underline{\text{事象の地平面}}\text{： 座標変換による除去が可能な}\textbf{見かけの座標特異点} \end{cases}$$

※ **クルスカル座標**により，時空領域を $0 < r < \infty$ へ拡張可能。

・ $r = r_g$ ： $\begin{cases} \textbf{未来の地平面＝ブラック・ホールの入口（}\boldsymbol{r = r_g}\textbf{の未来に }\boldsymbol{r = 0}\textbf{ の曲率特異点）} \\ \textbf{過去の地平面＝ホワイト・ホールの出口（}\boldsymbol{r = r_g}\textbf{の過去に }\boldsymbol{r = 0}\textbf{ の曲率特異点）} \end{cases}$

5. Appendix：３次元定曲率空間の計量

※ 計量を $ds^2 = \mathrm{e}^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$ とする。

・ リーマン曲率：**3-(d)** の結果より， $R^{21}{}_{21} = R^{31}{}_{31} = \dfrac{\lambda'}{r}\mathrm{e}^{-2\lambda}$, $\quad R^{32}{}_{32} = \dfrac{1}{r^2}\left(1-\mathrm{e}^{-2\lambda}\right)$

・ K を適当な定数として，$\mathrm{e}^{-2\lambda(r)} = 1-Kr^2$ のとき，$R^{32}{}_{32} = \dfrac{1}{r^2}\left\{1-(1-Kr^2)\right\} = K$（定数）となる。

・ このとき，$R^{21}{}_{21} = R^{31}{}_{31} = \dfrac{\lambda'}{r}\mathrm{e}^{-2\lambda} = -\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(\mathrm{e}^{-2\lambda(r)}\right) = -\dfrac{1}{2r}\cdot\dfrac{d}{dr}\left(1-Kr^2\right) = K$（定数）となる。

∴ **定曲率空間の計量関数** ： $\mathrm{e}^{-2\lambda(r)} = 1-Kr^2 \ \to\ R^{ij}{}_{k\ell} = K\left(\delta^i_k\delta^j_\ell - \delta^i_\ell\delta^j_k\right)$ ※ 定数 $\boldsymbol{K}$ を**曲率定数**という。

・ **ロバートソン＝ウォーカー計量（一様等方宇宙モデルの計量）**

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left\{\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right\},$$ $a(t)$ は宇宙の膨張・収縮を表す**スケール因子**