〔 時空モデルと計量 〕

（1）ニュートンの絶対時間と慣性座標系

- 慣性座標系：$\begin{cases} \cdot\, t = t' & \text{：絶対時間（すべての慣性観測者に共通の時計）} \\ \cdot\, (x, y, z) \to (x', y', z') & \text{：ガリレイ変換＆空間座標の回転} \end{cases}$

- ３次元ユークリッド計量：$\Big(ds^2\Big)_{\text{時間 } t \text{ が一定}} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 > 0$

（2）特殊相対論における光速度不変の原理と慣性座標系

- 慣性座標系：$\begin{cases} \cdot\, c = c' = 299792458\mathrm{m/s}^{\dagger} & \text{：光速度不変の原理（国際単位系での定義値}^{\dagger}\text{）} \\ \cdot\, (ct, x, y, z) \to (ct', x', y', z') & \text{：(狭義の) ローレンツ変換＆空間座標の回転} \end{cases}$

- ミンコフスキー計量：$ds^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = -c^2(dt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$

  ※ 真空中の任意の光線経路上における任意の変位 (cdt, dx, dy, dz) に対し，$ds^2 = 0$ が成り立つ。

- ミンコフスキー計量の表記に関する慣例　※ $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$ は４次元時空の慣性座標系

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^{3} \eta_{ab} dx^a dx^b, \quad \eta_{ab} \equiv \begin{cases} -1 & a = b = 0 \\ +1 & a = b = 1 \sim 3 \\ 0 & a \neq b \end{cases}$$

  ※ 和記号を省略するアインシュタインの記法では，$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$ となる。

（3）一般相対論における等価原理と一般座標系

- 加速度系におけるニュートンの運動方程式

$$\begin{cases} \vec{F} & \text{：重力以外の外力} \\ \vec{g} & \text{：重力加速度} \\ \vec{A} & \text{：見かけの加速度} \\ m_G & \text{：重力質量} \end{cases} \quad \text{として，} m\vec{a} = \vec{F} + m_G \vec{g} + m\vec{A}$$

- 等価原理：すべての物体に対し，$m_G = m$ が成り立つ。

  $\therefore\ \vec{a} = \dfrac{1}{m}\vec{F} + \underline{\underline{\vec{g} + \vec{A}}}$　※ アインシュタインの主張：重力場は見かけの加速度と<u>統合</u>されるべき

- 一般座標と計量に対する考察

  ※ ４次元時空の一般座標の組を $(x) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$，$(x') = (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$，etc. のように表記する。

  (a) 見かけの加速度 $\vec{A}$ は (時間も含む) 一般座標変換に起因する。

  (b) 重力や（極座標での遠心力などの）見かけの力について，これらの有無は計量の形から判別できる。

- 計量仮説：重力場と見かけの加速度は共に，<u>４次元時空の計量のみ</u>によって記述される。

- 一般相対性原理：物理法則は一般座標の選択に対し，座標独立な形で表現される。

  ※ 特に，時空の計量 ds^2 は一般座標変換に対する不変量。

- 一般座標系：$\begin{cases} \cdot\, (x) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \to (x') \equiv (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) & \text{：一般座標変換} \\ \cdot\, ds^2 = \displaystyle\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x) dx^a dx^b = \sum_{a,b=0}^{3} g_{a'b'}(x') dx^{a'} dx^{b'} & \text{：時空の計量} \end{cases}$

（４）測地線仮説 ～慣性の法則に代わる基本法則として～

- 慣性の法則：外力を受けない物体の運動は３次元ユークリッド空間上で，等速直線運動の軌道を描く。

- 測地線仮説：重力以外の外力を受けない物体の運動は４次元時空上で，時間的な測地線を描く。

※ 測地線：指定した２点間の『計量で測る距離』について，極値（極大もしくは極小）を与える曲線。

- 測地線のアフィンパラメータ：$L \equiv \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x)\frac{dx^a(\lambda)}{d\lambda}\frac{dx^b(\lambda)}{d\lambda}$ が一定値となるようなパラメータ λ

※ 慣性の法則に現れる『等速』の部分を，測地線上のパラメータ（目盛り）の選択に読み替える。

- 測地線方程式（$a = 0 \sim 3$）：$\dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x^a}$ ※ λをアフィンパラメータとして，$\dot{x}^a \equiv \dfrac{dx^a(\lambda)}{d\lambda}$

（５）４次元時空の計量

- 計量関数 $g_{ab}(x)$：計量 ds^2 には必ず $\underline{g_{ab}(x) + g_{ba}(x)}$ の形で現れるので，$g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$ を要請する。

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x)dx^a dx^b &= g_{00}(x)(dx^0)^2 + g_{01}(x)dx^0dx^1 + g_{10}(x)dx^1dx^0 + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\Big(\,\underline{g_{00}(x) + g_{00}(x)}\,\Big)(dx^0)^2 + \Big(\,\underline{g_{01}(x) + g_{10}(x)}\,\Big)(dx^0)(dx^1) + \cdots
\end{aligned}
$$

- ニュートン的計量：遅い運動（$|v| << c$）をする物体が弱い重力場（$|\phi_N| << c^2$）をつくるとき。

$$
(ds_N)^2 = \sum_{a,b=0}^{3} \eta_{ab}dx^a dx^b - 2\phi_N(dt)^2 = -\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi_N\right)c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2
$$

- 計量の符号：計量を $dx^0 \sim dx^3$ の２次形式と見なし，平方完成をおこなう。

※ $\mathrm{e}^0 \sim \mathrm{e}^3$ は平方完成の各ブロック，η_{AB} は（前述の）ミンコフスキー計量に現れる記号。

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x)dx^a dx^b &= \sum_{A,B=0}^{3} \eta_{AB}\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B \;:\; \mathrm{e}^A \equiv \sum_{a=0}^{3}\mathrm{e}^A{}_a(x)dx^a,\ \mathrm{e}^B \equiv \sum_{b=0}^{3}\mathrm{e}^B{}_b(x)dx^b \\
&= -(e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 \;:\; \text{時空計量の符号は}\underline{\underline{\text{ローレンツ的}}}\text{，すなわち}(-,+,+,+)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ g_{ab}(x) = \sum_{A,B=0}^{3} \eta_{AB}\mathrm{e}^A{}_a(x)\mathrm{e}^B{}_b(x)
$$

：１０個の関数 $g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$ を１６個の関数 $\mathrm{e}^A{}_a(x)$ で表す。

※ シルヴェスターの慣性則：計量の符号は，平方完成の各ブロックの選び方には依らない。

※ $\mathrm{e}^A = \displaystyle\sum_{a=0}^{3}\mathrm{e}^A{}_a dx^a$ を『テトラード（Tetrad）』あるいは『四脚場』という。

- 局所ローレンツ変換 ※ テトラードの選び方の任意性

$$
\mathrm{e}^{A'} \equiv \sum_{C=0}^{3}\Lambda^{A'}_C(x)\mathrm{e}^C
$$

※ $\Lambda^{A'}_C(x)$ は $\displaystyle\sum_{A,B=0}^{3}\eta_{AB}\Lambda^{A'}_C(x)\Lambda^{B'}_D(x) = \eta_{CD}$を満たす任意の係数関数。

$\downarrow$

$$
\begin{aligned}
(ds')^2 \equiv \sum_{A,B=0}^{3}\eta_{AB}\mathrm{e}^{A'}\mathrm{e}^{B'} &= \sum_{A,B=0}^{3}\eta_{AB}\left(\sum_{C=0}^{3}\Lambda^{A'}_C(x)\mathrm{e}^C\right)\left(\sum_{D=0}^{3}\Lambda^{B'}_D(x)\mathrm{e}^D\right) \\
&= \sum_{C,D=0}^{3}\left(\sum_{A,B=0}^{3}\eta_{AB}\Lambda^{A'}_C(x)\Lambda^{B'}_D(x)\right)\mathrm{e}^C\mathrm{e}^D = \sum_{C,D=0}^{3}\eta_{CD}\mathrm{e}^C\mathrm{e}^D = \sum_{A,B=0}^{3}\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = ds^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ １６個の関数 $\mathrm{e}^A_a(x)$ のうち，１６－１０＝６個分は $\underline{\underline{\text{局所ローレンツ変換 }\Lambda^{A'}_C(x)}}$ の自由度を表す。