〔テンソル代数〕

※
$$\begin{cases} X^{a'}_b \equiv \dfrac{\partial x^{a'}(x)}{\partial x^b} \text{ と } X^a_{b'} \equiv \dfrac{\partial x^a(x')}{\partial x^{b'}} \text{ はそれぞれ，} n \text{ 次元ヤコビ行列 } X \text{ と } X^{-1} \text{ の } a \text{ 行 } b \text{ 列成分を表す。} \\ \underline{\underline{\textbf{公式}}} \quad X^{a'}_c X^c_{b'} = \delta^{a'}_{b'},\ \ X^a_{c'} X^{c'}_b = \delta^a_b \ \ : \ \ \delta^{a'}_{b'} = \delta^a_b = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \text{ はクロネッカーのデルタ。} \\ \underline{\underline{\textbf{定義}}} \quad \text{すべての成分が 0 となるテンソル } \mathbf{0} \text{ を}\textbf{零テンソル}\text{という。} \end{cases}$$

(1) テンソル積と縮約

(a) 変換則のまとめ

公式 任意のテンソルの座標成分は座標変換 $(x) \to (x')$ に対し，上添字は接ベクトルの成分の変換則に，下添字は１形式の成分の変換則に，それぞれしたがう。

（例）
$$\begin{cases} v^{a'} = X^{a'}_b v^b & \text{接ベクトルの成分：(1,0) 型} \\ \omega_{a'} = X^b_{a'} \omega_b & \text{１形式の成分：(0,1) 型} \\ g_{a'b'} = X^c_{a'} X^d_{b'} g_{cd} & \text{計量テンソルの成分：(0,2) 型} \\ R^{a'}{}_{b'c'd'} = X^{a'}_e X^f_{b'} X^g_{c'} X^h_{d'} R^e{}_{fgh} & \text{曲率テンソルの成分：(1,3) 型} \end{cases}$$

公式 座標基底は各添字の “上下” と “ダッシュの有無” に応じて，座標成分の場合と同じ形の変換則にしたがう。

（例）
$$\begin{cases} \vec{e}_{a'} = X^b_{a'} \vec{e}_b & \text{(1,0) 型テンソルの基底：接ベクトルの基底} \\ \tilde{e}^{a'} = X^{a'}_b \tilde{e}^b & \text{(0,1) 型テンソルの基底：１形式の基底} \\ \boldsymbol{e}^{b'c'}_{a'} = X^d_{a'} X^{b'}_e X^{c'}_f \boldsymbol{e}^{ef}_d \quad (\ \boldsymbol{e}^{bc}_a \equiv \vec{e}_a \otimes \tilde{e}^b \otimes \tilde{e}^c\ ) & \text{(1,2) 型テンソルの基底：基底の簡易表記} \\ \vec{e}_{a'} \otimes \tilde{e}^{b'} \otimes \tilde{e}^{c'} = X^d_{a'} X^{b'}_e X^{c'}_f \vec{e}_d \otimes \tilde{e}^e \otimes \tilde{e}^f & \text{(1,2) 型テンソルの基底：基底のテンソル積表記} \end{cases}$$

(b) テンソル積

公式 任意の (k, ℓ) 型テンソルの成分と任意の (r, s) 型テンソルの成分の積は，$(k+r, \ell+s)$ 型テンソルの成分と同じ変換則にしたがう。

（例）
$$\begin{cases} P^{a'b'} = X^{a'}_e X^{b'}_f P^{ef} & (2,0) \text{ 型の成分} \\ Q^{c'}_{d'} = X^{c'}_g X^h_{d'} Q^g_h & (1,1) \text{ 型の成分} \end{cases}$$

$$\to\ P^{a'b'} Q^{c'}_{d'} = X^{a'}_e X^{b'}_f X^{c'}_g X^h_{d'} (P^{ef} Q^g_h) \qquad \therefore\ P^{ab} Q^c_d \text{ は } (3,1) \text{ 型の成分の変換則にしたがう。}$$

定義 (k, ℓ) 型テンソル $\boldsymbol{A}$ と (r, s) 型テンソル $\boldsymbol{B}$ の**テンソル積** $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \equiv A^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_\ell} B^{a_{k+1} \cdots a_{k+r}}_{b_{\ell+1} \cdots b_{\ell+s}} \boldsymbol{e}^{b_1 \cdots b_\ell b_{\ell+1} \cdots b_{\ell+s}}_{a_1 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+r}} & \text{テンソル表記} \\ (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{a_1 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_{k+r}}_{b_1 \cdots b_\ell b_{\ell+1} \cdots b_{\ell+s}} \equiv A^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_\ell} B^{a_{k+1} \cdots a_{k+r}}_{b_{\ell+1} \cdots b_{\ell+s}} & \text{成分表記} \end{cases}$$

（例）
$$\begin{cases} \tilde{\omega} = \omega_a \tilde{e}^a & (0,1) \text{ 型} \\ \boldsymbol{S} = S^a_b \boldsymbol{e}^b_a = S^a_b \vec{e}_a \otimes \tilde{e}^b & (1,1) \text{ 型} \\ \vec{v} = v^a \vec{e}_a & (1,0) \text{ 型} \end{cases} \quad \to \quad \begin{aligned} \tilde{\omega} \otimes \boldsymbol{S} \otimes \vec{v} &= \underline{(\tilde{\omega} \otimes \boldsymbol{S} \otimes \vec{v})^{ab}_{cd}}\ \boldsymbol{e}^{cd}_{ab} = \underline{\omega_c S^a_d v^b}\ \underline{\underline{\boldsymbol{e}^{cd}_{ab}}} \\ &= \omega_c S^a_d v^b\ \underline{\underline{\vec{e}_a \otimes \vec{e}_b \otimes \tilde{e}^c \otimes \tilde{e}^d}} \end{aligned}$$

※
$$\begin{cases} \vec{u} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{u} = u^a v^b \boldsymbol{e}_{ab} - v^a u^b \boldsymbol{e}_{ab} = (u^a v^b - v^a u^b)\ \boldsymbol{e}_{ab} \ : \ \text{一般には零テンソル } \mathbf{0} \text{ ではない。} \\ \therefore\ \textbf{テンソル積の順番には意味がある。}\text{（上記の例では，一般に } u^a v^b \neq v^a u^b \text{）} \end{cases}$$

(c) 縮約

公式 任意の (r, s) 型テンソルの成分において，任意の上添字と任意の下添字の組について和をとったものは，$(r-1, s-1)$ 型テンソルの成分の変換則にしたがう。

（例） $T^{a'b'}_{c'} = X^{a'}_d X^{b'}_e X^f_{c'} T^{de}_f \ :\ (2,1)$ 型 $\to$
$$\begin{cases} T^{a'b'}_{b'} = X^{a'}_d (X^{b'}_e X^f_{b'}) T^{de}_f = X^{a'}_d \delta^f_e T^{de}_f = X^{a'}_d T^{de}_e \\ T^{a'b'}_{a'} = X^{b'}_e (X^{a'}_d X^f_{a'}) T^{de}_f = X^{b'}_e \delta^f_d T^{de}_f = X^{b'}_e T^{de}_d \end{cases}$$

$\therefore$ $(T^{ab}_b)\ \boldsymbol{e}_a = (T^{ab}_b)\ \vec{e}_a$ と $(T^{ba}_b)\ \boldsymbol{e}_a = (T^{ba}_b)\ \vec{e}_a$ はともに，$(1,0)$ 型テンソル（接ベクトル）。

※ 上記の例では一般に $T^{ab}_b \neq T^{ba}_b$ なので，$(T^{ab}_b)\ \boldsymbol{e}_a$ と $(T^{ba}_b)\ \boldsymbol{e}_a$ は**互いに異なるテンソル**になる。

（例） **テンソル積**：$\boldsymbol{g} \otimes \vec{u} \otimes \vec{v} = g_{ab} u^c v^d \boldsymbol{e}^{ab}_{cd}$ $\underline{\mathbf{(2,2)}\ \textbf{型}}$ $\longrightarrow$ **縮約**：$g_{ab} u^a v^b = \boldsymbol{g}(\vec{u}, \vec{v})$ $\underline{\textbf{(0,0) 型（不変内積）}}$

(2) 計量テンソルの役割

(a) 計量テンソル：$\boldsymbol{g}$ は以下の条件を満たすものとする。

(a-1) (0,2) 型テンソル：$\boldsymbol{g} = g_{ab}\ \boldsymbol{e}^{ab}$

(a-2) 対称テンソル：$g_{ab} = g_{ba}$ in (x)　※ $\forall\vec{u},\ \forall\vec{v}\ ;\ \boldsymbol{g}(\vec{u},\vec{v}) = \boldsymbol{g}(\vec{v},\vec{u}) \Longleftrightarrow g_{ab} = g_{ba}$

$$\begin{aligned} g_{a'b'} &= X^c_{a'}X^d_{b'}g_{cd} = X^d_{a'}X^c_{b'}g_{dc} &&:\ \text{和をとる添字対 } (c,d) \text{ の役割交換より} \\ &= X^c_{b'}X^d_{a'}g_{dc} = X^c_{b'}X^d_{a'}g_{cd} &&:\ g_{dc} = g_{cd}\ \text{（対称性）より} \\ &= g_{b'a'} \qquad \therefore\ g_{ab} = g_{ba}\ \text{ in } \exists(x) \implies g_{a'b'} = g_{b'a'}\ \text{ in } \forall(x') \end{aligned}$$

(a-3) 非退化（非特異）

$\det(g_{ab}) \neq 0$ in (x) $\Longleftrightarrow$ **逆行列** (g^{ab}) in (x) が存在する。

(b) 逆計量テンソル：$\boldsymbol{g^{-1}}$ を以下のように定義する。

(b-1) (2,0) 型テンソル：$\boldsymbol{g}^{-1} = (\boldsymbol{g^{-1}})^{ab}\ \boldsymbol{e}_{ab}$

(b-2) $(\boldsymbol{g^{-1}})^{ab} = g^{ab}$ in (x) ： 座標系 (x) における $\boldsymbol{g^{-1}}$の**成分行列**は，$\boldsymbol{g}$ の成分行列の**逆行列**

定理 座標系 (x') における $\boldsymbol{g}$ の成分行列を $(g_{a'b'})$，その逆行列を $(g^{a'b'})$ とすると，$(\boldsymbol{g^{-1}})^{a'b'} = g^{a'b'}$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{g^{-1}})^{a'b'}g_{b'c'} &= X^{a'}_d X^{b'}_e \underline{(\boldsymbol{g^{-1}})^{de}} \cdot X^f_{b'}X^g_{c'}g_{fg} \\ &= X^{a'}_d \underline{\underline{X^{b'}_e}}\ \underline{g^{de}} \cdot \underline{\underline{X^f_{b'}}}X^g_{c'}g_{fg} \\ &= X^{a'}_d X^g_{c'}\ \underline{\underline{\delta^f_e}}\ g^{de}g_{fg} \\ &= X^{a'}_d X^g_{c'}\ \underline{g^{de}g_{eg}} \\ &= X^{a'}_d X^g_{c'}\ \underline{\delta^d_g} \\ &= X^{a'}_d X^d_{c'} \\ &= \delta^{a'}_{c'} \end{aligned}$$

$\therefore$ $(\boldsymbol{g^{-1}})^{a'b'}$ と $g_{b'c'}$ は，**互いに逆行列関係**にある行列の成分。　※ $g_{a'b'}(\boldsymbol{g^{-1}})^{b'c'} = \delta^{c'}_{a'}$ も成り立つ。

(c) 不変内積：接ベクトルおよび１形式の（座標独立な）内積を以下のように定義する。

(c-1) **接ベクトルの内積**：任意の $\vec{u}$ と $\vec{v}$ に対して，$\vec{u}\cdot\vec{v} \equiv \boldsymbol{g}(\vec{u},\vec{v}) = g_{ab}u^a v^b = g_{a'b'}u^{a'}v^{b'}$

(c-2) **１形式の内積**：任意の $\tilde{\lambda}$ と $\tilde{\omega}$ に対して，$\tilde{\lambda}\cdot\tilde{\omega} \equiv \boldsymbol{g^{-1}}(\tilde{\lambda},\tilde{\omega}) = g^{ab}\lambda_a\omega_b = g^{a'b'}\lambda_{a'}\omega_{b'}$

(d) 写像としての計量テンソル：添字の “上下の移動”

任意のテンソルについて，g_{ab} や g^{ab} とのテンソル積を縮約と組み合わせて，テンソルの型を（**可逆な操作**で）変更することができる。

（例）$\begin{cases} g_{ab}A^{cd}\ :\ (\boldsymbol{2},\boldsymbol{2})\ \text{型} & \to\ g_{ab}A^{bd},\ g_{ab}A^{cb}\ :\ (\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})\ \text{型} \\ g_{ab}g^{cd}R^e{}_{fgh}\ :\ (\boldsymbol{3},\boldsymbol{5})\ \text{型} & \to\ g_{ab}g^{cd}R^b{}_{dgh},\ g_{ab}g^{cd}R^b{}_{fdh},\ g_{ab}g^{cd}R^b{}_{fgd}\ :\ (\boldsymbol{1},\boldsymbol{3})\ \text{型} \end{cases}$

すなわち**写像としての計量の作用**は，$\begin{cases} g_{ab}\ :\ (r,s)\ \text{型} \to (r-1,s+1)\ \text{型} \\ g^{ab}\ :\ (r,s)\ \text{型} \to (r+1,s-1)\ \text{型} \end{cases}$ である。

表記方法 計量による上記の作用を通常，**添字の “上下の移動”** で表記する。

（例）$v_a = g_{ab}v^b$，$\omega^a = g^{ab}\omega_b$，$g_{ab}g^{cd}R^b{}_{def} = g_{ab}R^{bc}{}_{ef} = g^{cd}R_{adef} = R_a{}^c{}_{ef}$

※ **いくつかの慣例的な例外を除き，添字の上下については今後，“左詰め” の表記は用いない。**

× A^{ab}_c　　○ $A^{ab}{}_c$，$A^a{}_c{}^b$，$A_c{}^{ab}$　　（例外）δ^a_b，$\delta^{a'}_{b'}$，**接続係数** Γ^a_{bc} など。