〔一般相対論における時空モデル：多様体〕　※ 時空モデルに関する数学的な補足

$$
※ \begin{cases} \cdot\ \text{実数の集合を記号}\mathbb{R}\text{で表す。すなわち任意の実数}\,x\,\text{について，}x\in\mathbb{R}\text{である。} \\ \cdot\ n\,\text{個の実数の組の集合を記号}\mathbb{R}^n\text{で表す。例えば，}\mathbb{R}^2=\left\{(x,y)\,|\,x\in\mathbb{R}\ \ \text{かつ}\ \ y\in\mathbb{R}\right\}\text{である。} \\ \cdot\ \text{『}A\to B\text{』は『}A\text{ならば}B\text{』,『}P\iff Q\text{』は『}P\text{と}Q\text{は同値（必要十分条件)』をそれぞれ表す。} \end{cases}
$$

1. n 次元実多様体と座標（座標関数）

※ 通常，多様体 M の元（要素）を『点』という。用例：『多様体 M 上の点 p の座標を (x_p) とする。』

※ 要約すると『多様体』とは『なめらかな座標のみをもつ点の集合』であり，『その性質のみを用いて順次，幾何学的な要素を定義・構成』するのが『微分幾何学』である。ただし，座標の存在を大前提にしつつ，構成される幾何学には『座標独立』であることを要請する。

<u>定義</u>　次の性質 (1) と (2) をもつ集合 M を『n 次元実多様体』という。

(1) 『局所座標系』$\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\cdots$ が付随する M の部分集合 $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\cdots$ があり，これらの和集合が M に等しい。すなわち，$M=\mathcal{O}_1\cup\mathcal{O}_2\cup\cdots$　※ この部分集合の個数は無限個でもよいので $\cdots$ をつけた。

(2) 局所座標系 $\mathcal{U}_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots)$ は以下の性質をもつ。

(a) n を α によらない正の整数として，$\mathcal{U}_\alpha$ は $\mathbb{R}^n$ 上の開領域である。

$$
\mathcal{U}_\alpha=\left\{\ (x)\equiv(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ c^a_{(\alpha)}<x^a<d^a_{(\alpha)}\ \ (a=1\sim n),\ \ c^a_{(\alpha)}\ \text{と}\ d^a_{(\alpha)}\ \text{は適当な実数}\ \right\}
$$

(b) $\mathcal{O}_\alpha$ の元と $\mathcal{U}_\alpha$ の元には，互いに 1 対 1 の対応関係にある。　※ (x_p) を p の『座標』という。

$$
\begin{cases} \forall p\ \in\mathcal{O}_\alpha\ \ \to\ {}^\exists(x_p)\equiv({x_p}^1,\cdots,{x_p}^n)\in\mathcal{U}_\alpha \\ \forall(x_p)\in\mathcal{U}_\alpha\ \to\ {}^\exists p\in\mathcal{O}_\alpha \end{cases}\quad \text{かつ}\quad p\neq q\ \text{in}\ \mathcal{O}_\alpha\iff(x_p)\neq(x_q)\ \text{in}\ \mathcal{U}_\alpha
$$

(c) 領域 $\mathcal{O}_\alpha\cap\mathcal{O}_{\alpha'}$ が空集合でないとき，$\mathcal{O}_\alpha\cap\mathcal{O}_{\alpha'}$ では次の『座標変換』が定義される。

$$
\begin{cases} (\,x\,)\equiv(x^1,\cdots,x^n) & :\mathcal{O}_\alpha\ \text{の座標} \\ (x')\equiv(x^{1'},\cdots,x^{n'}) & :\mathcal{O}_{\alpha'}\ \text{の座標} \end{cases}\ \text{として}\ \begin{cases} x^a\ =X^a(x') & :\text{座標}\ (x')\ \text{の関数としての}\ x^a \\ x^{a'}=X^{a'}(x) & :\text{座標}\ (x)\ \text{の関数としての}\ x^{a'} \end{cases}
$$

このとき，関数 $X^a(x')$ と $X^{a'}(x)$ が共に『無限階連続微分可能（C^∞ 級)』であることを要請する。

※ 一般相対論では通常，次の要請 (3) を追加することにより『一般相対性原理』を反映させる。

(3) 『極大多様体』の要請：上記の要件 (1) と (2) を満たすものはすべて局所座標系であり，人為的な取捨選択により局所座標系の一部を排除してはならない。　※ つまり，可能な座標系すべてを考慮する。

(4) 『リーマン多様体』：『計量』をもつ多様体を『リーマン多様体』という。

2. 多様体と局所座標系の例

(1) $\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ は (x,y) 自身を局所座標系とする 2 次元多様体であり，座標系 (x,y) だけで $\mathbb{R}^2$ 全体を覆うことができる。
※『局所座標系』の存在要請より，『多様体とは局所的には $\mathbb{R}^n$ に見えるもの』と要約できる。

(2) $\mathcal{U}=\{(r,\phi)|\ 0<r<\infty,\ 0<\phi<2\pi\ :\ (r\cos\phi,r\sin\phi)=(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ は $\mathbb{R}^2$ 全体を覆うことはできないが，領域 $\mathcal{O}\equiv\mathbb{R}^2-\{(x,y)|x\geq 0\ \text{かつ}\ y=0\}$ の局所座標系である。
※ $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}^2$ から x 軸上の $x\geq 0$ の部分を除いたものであり，(r,ϕ) は $\mathcal{O}$ に付随する平面極座標。

(3) リーマン多様体の極大拡張　※ リーマン多様体では計量により座標領域が制限される。

例：$ds^2=\mathrm{e}^{2\rho}d\rho^2\ \ (-\infty<\rho<+\infty)$

$$
\begin{cases} \cdot\ x=\mathrm{e}^\rho\ :\ 0<x<+\infty\longleftrightarrow-\infty<\rho<+\infty \\ \cdot\ ds^2=\mathrm{e}^{2\rho}d\rho^2=dx^2\quad\therefore x\ \text{の定義域を}\ -\infty<x<+\infty\ \text{へ拡張することができる。} \end{cases}
$$

※ 座標変換により計量の特異性が取り除けるとき，変換後の座標で表された計量が非特異である領域全体へリーマン多様体を拡張し，拡張不可能な『極大リーマン多様体』になるまでこれを繰り返す。

(4) 病的な多様体：ハウスドルフでない多様体の例

$\begin{cases} \mathcal{O}_1 = \mathcal{U}_1 = \{x | x \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{O}_2 = \mathcal{U}_2 = \{y | y \in \mathbb{R}\} \end{cases}$ として，$x = y < 0$ の部分を『のり付け』する。 ※ $x = 0$ と $y = 0$ は異なる。

このとき，$x = 0$ の開近傍 $\mathcal{X}_1 = \{x | x^2 < \epsilon^2,\ \epsilon > 0\}$ と $y = 0$ の開近傍 $\mathcal{Y}_2 = \{y | y^2 < \delta^2,\ \delta > 0\}$ をそれぞれ，どのように選んでも，$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ とはならない。 ∴ 『ハウスドルフの分離公理』が不成立。

※ x_0 と y_0 が共に通常の実数直線上の異なる２点であれば，容易に図示できるように，$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ となるような開近傍 $\mathcal{X} = \{x | (x - x_0)^2 < \epsilon^2,\ \epsilon > 0\}$ と $\mathcal{Y} = \{y | (y - y_0)^2 < \delta^2,\ \delta > 0\}$ が存在する。上記の例のような非ハウスドルフ多様体を病的とみなし，時空モデルから排除することが多い。

※ 多様体が病的でない条件として『ハウスドルフ』と『パラコンパクト』を要請することが多い。後者は，直観的には『座標系の張り方を任意に１つ選ぶとき，無限個の座標近傍に含まれてしまうような点は存在しない』こと（『１の分割』の存在）を保証する。なお，『計量を定義することができる多様体は，すべてパラコンパクト』であることが知られている。

(5) 自習課題：位相空間に関する次の用語について調べよ。

『コンパクト』　『連結』と『単連結』　『ハウスドルフ』　『パラコンパクト』と『１の分割』

3. 多様体上の関数と関数の微分

(1) 多様体 M の適当な部分集合 $\mathcal{S}$ の各点ごとに実数を割り当てる規則 f を『実関数』という。

※ $p \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ は M 自身でもよい。) → 適当な実数 $f(p)$ の存在　(∴ 座標 (x) は n 個の実関数の組。)

要請：$\begin{cases} f(x) & :\ \text{座標系}\ (x)\ \text{での関数値} \\ f'(x') & :\ \text{座標系}\ (x')\ \text{での関数値} \end{cases}$ → $\underline{\underline{f(p) = f(x_p) = f'(x'_p)}}$ 『関数 f の座標独立性』

(2) 関数 f の『全微分』： $df \equiv \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a \equiv \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial x^{a'}} dx^{a'}$ 『df の座標独立性』

※ 特に座標関数について，$\begin{cases} x^{b'} = X^{b'}(x) \to dx^{b'} = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial X^{b'}}{\partial x^a} dx^a \equiv \sum_{a=1}^{n} X^{b'}_a dx^a \\ x^b = X^b(x') \to dx^b = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial X^b}{\partial x^{a'}} dx^{a'} \equiv \sum_{a=1}^{n} X^b_{a'} dx^{a'} \end{cases}$

(3) 微分公式（チェーン・ルール）： $\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^{b'}} \equiv \sum_{b=1}^{n} X^{b'}_a \frac{\partial}{\partial x^{b'}}$, $\frac{\partial}{\partial x^{a'}} = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} \frac{\partial}{\partial x^b} \equiv \sum_{b=1}^{n} X^b_{a'} \frac{\partial}{\partial x^b}$

≪微分公式の導出≫　※ 全微分（関数の微小変化）に対する座標独立性の要請が重要な鍵。

$$df = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial x^{b'}} \underline{\underline{dx^{b'}}} = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial x^{b'}} \underline{\underline{\sum_{a=1}^{n} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^a} dx^a}} = \sum_{a=1}^{n} \left\{ \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^a} \frac{\partial f'}{\partial x^{b'}} \right\} dx^a$$ ： 和の順番を交換した。

$$= \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a$$ ： 任意の $f(x) = f'(x')$ と任意の dx^aで等号が成立ことを要請する。

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^{b'}} = \sum_{b=1}^{n} X^{b'}_a \frac{\partial}{\partial x^{b'}},$$ 同様に $$\frac{\partial}{\partial x^{a'}} = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} \frac{\partial}{\partial x^b} = \sum_{b=1}^{n} X^b_{a'} \frac{\partial}{\partial x^b}$$

(4) 微分公式の応用： $\sum_{b=1}^{n} X^{b'}_a X^c_{b'} = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^c}{\partial x^{b'}} = \frac{\partial x^c}{\partial x^a} = \delta^c_a \equiv \begin{cases} 1 & (a = c) \\ 0 & (a \neq c) \end{cases}$，同様に $\sum_{b=1}^{n} X^b_{a'} X^{c'}_b = \delta^{c'}_{a'} \equiv \delta^c_a$

(5) 『ヤコビ行列』と『ヤコビアン』：１次変換 $\begin{cases} dx^{a'} = \sum_{b=1}^{n} X^{a'}_b dx^b \\ dx^a = \sum_{b=1}^{n} X^a_{b'} dx^{b'} \end{cases}$ の逆変換が存在 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \det\left(X^{a'}_b\right) \neq 0 \\ \det\left(X^a_{b'}\right) \neq 0 \end{cases}$