〔線形空間と双対空間（一般相対論Ｂへの準備）〕 ※ 線形空間と双対空間の組で不変内積を定義する。

※ 単位行列の a 行 b 列成分は，次のように定義される **クロネッカーのデルタ** δ^a_b で表される。 $\delta^a_b \equiv \begin{cases} 1 & a=b \\ 0 & a\neq b \end{cases}$

1. 実線形空間　ここでは，実線形空間の元（実ベクトル）を $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 等の太文字，実数を a, b 等の斜体文字で表す。

定義　集合 V の元が次の公理を満たすとき，V を実線形空間（実ベクトル空間）という。

≪実線形空間の公理≫

(1) 集合 V で和が定義され，以下の性質を満たす。

(a) 交換則：$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$　　(b) 結合則：$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(c) 零元 $\mathbf{0}$ の存在：$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$　　(d) 逆元 $-\mathbf{v}$ の存在：$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$

(2) 集合 V の元と実数との積が定義され，以下の性質を満たす。

(a) 実数 1 との積：$1\mathbf{v}=\mathbf{v}$　　(b) 結合則：$(ab)\mathbf{v}=a(b\mathbf{v})$

(c) 分配則１：$(a+b)\mathbf{v}=a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$　　(d) 分配則２：$a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

≪ベクトル代数の基本定理≫　※ 上記の公理より，次の諸定理が導かれる。

(1) 零元の一意性：$\mathbf{0}$ と $\mathbf{0}'$ が共に零元のとき，$\mathbf{0}'=\mathbf{0}$ である。

$$\begin{aligned}\mathbf{0}' &= \mathbf{0}'+\mathbf{0} \ :\ \text{公理 (1)} - \text{(c) 零元 }\mathbf{0}\text{ の性質} \\ &= \mathbf{0}+\mathbf{0}' \ :\ \text{公理 (1)} - \text{(a) 交換則} \\ &= \mathbf{0} \ :\ \text{公理 (1)} - \text{(c) 零元 }\mathbf{0}'\text{の性質} \qquad \therefore\ \mathbf{0}'=\mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) 逆元の一意性： $-\mathbf{v}$ と $-\mathbf{v}'$ が共に $\mathbf{v}$ の逆元のとき，$-\mathbf{v}'=-\mathbf{v}$ である。

$$\begin{aligned}-\mathbf{v}' &= -\mathbf{v}'+\mathbf{0} = -\mathbf{v}'+\Big(\mathbf{v}+(-\mathbf{v})\Big) \ :\ \text{公理 (1)} - \text{(c) 零元 }\mathbf{0}\text{ の性質, 公理 (1)} - \text{(d) 逆元 } -\mathbf{v}\text{ の性質} \\ &= \Big(-\mathbf{v}'+\mathbf{v}\Big)+(-\mathbf{v}) = \Big(\mathbf{v}+(-\mathbf{v}')\Big)+(-\mathbf{v}) \ :\ \text{公理 (1)} - \text{(b) 結合則, 公理 (1)} - \text{(a) 交換則} \\ &= \mathbf{0}+(-\mathbf{v}) = -\mathbf{v}+\mathbf{0} \ :\ \text{公理 (1)} - \text{(d) 逆元 } -\mathbf{v}'\text{の性質, 公理 (1)} - \text{(a) 交換則} \\ &= -\mathbf{v} \ :\ \text{公理 (1)} - \text{(c) 零元 }\mathbf{0}\text{ の性質} \qquad \therefore\ -\mathbf{v}'=-\mathbf{v}\end{aligned}$$

(3) $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ： 公理 (2) の (a) と (c) より，$\mathbf{v}=1\mathbf{v}=(1+0)\mathbf{v}=1\mathbf{v}+0\mathbf{v}=\mathbf{v}+0\mathbf{v}$　∴ 零元の一意性より，$0\mathbf{v}=\mathbf{0}$

(4) $(-1)\mathbf{v}=-\mathbf{v}$ ： 公理 (2) の (a) と (c)，および $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$ を用いる。

$$\mathbf{0}=0\mathbf{v}=\Big(1+(-1)\Big)\mathbf{v}=1\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v}=\mathbf{v}+(-1)\mathbf{v} \qquad \therefore\ \text{逆元の一意性より，}(-1)\mathbf{v}=-\mathbf{v}$$

定義　$\mathbf{u}-\mathbf{v}\equiv\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ でベクトルの差を定義する。

2. 線形空間 V の基底と次元

定義　V の基底とは次の条件を満たす V の元の集まり $\mathcal{E}=\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}$ であり，このとき n を V の次元という。

(a) 線形空間 V を張る。すなわち，任意のベクトル $\mathbf{v}$ が基底ベクトルの線形結合で表される。

$$\forall\mathbf{v}\in V,\ \exists(v^1,\cdots,v^n)\in\mathbb{R}^n;\ \mathbf{v}=\sum_{a=1}^{n}v^a\mathbf{e}_a$$

※ $(v^1,\cdots,v^n)$ を基底 $\mathcal{E}$ に関する $\mathbf{v}$ の成分という。

(b) 線形独立：$\mathbf{v}=\mathbf{0}$ となるのは $v^1=\cdots=v^n=0$ のときのみ。

定理　次の２つの定理は重要である。

(1) 成分の一意性：$\mathbf{v}=\displaystyle\sum_{a=1}^{n}v^a\mathbf{e}_a=\sum_{a=1}^{n}\hat{v}^a\mathbf{e}_a$ ならば，$\hat{v}^a=v^a$ である。

$$\mathbf{0}=\mathbf{v}-\mathbf{v}=\sum_{a=1}^{n}\hat{v}^a\mathbf{e}_a-\sum_{a=1}^{n}v^a\mathbf{e}_a=\sum_{a=1}^{n}(\hat{v}^a-v^a)\,\mathbf{e}_a \qquad \therefore\ \text{基底の線形独立性より，}\ \hat{v}^a-v^a=0$$

(2) 線形空間 V の次元（dim$V$ と表記）は，基底の選び方によらない。

$\{\,\mathbf{e}_a \mid a = 1 \sim n\,\}$ と $\{\,\bar{\mathbf{e}}_\mu \mid \mu = 1 \sim m\,\}$ が共に線形空間 V の基底であるとき，$m = n$ となることを示す。

基底ベクトル自身も V の元であるから，適当な係数 (X_a^μ と Y_μ^a) を用いて次のように表現できる。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_a = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{m} X_a^\mu \bar{\mathbf{e}}_\mu & (a = 1 \sim n) \\ \bar{\mathbf{e}}_\mu = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} Y_\mu^b \mathbf{e}_b & (\mu = 1 \sim m) \end{cases} \quad \to \quad \sum_{b=1}^{n} \delta_a^b \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_a = \sum_{\mu=1}^{m} X_a^\mu \sum_{b=1}^{n} Y_\mu^b \mathbf{e}_b = \sum_{b=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{m} Y_\mu^b X_a^\mu \right) \mathbf{e}_b$$

$\therefore$ 成分の一意性より，$\displaystyle\sum_{\mu=1}^{m} Y_\mu^b X_a^\mu = \delta_a^b$ が得られる。同様に，$\mathbf{e}_b$を消去すると $\displaystyle\sum_{a=1}^{n} X_a^\mu Y_\nu^a = \delta_\nu^\mu$ が得られる。

添字の『上・下』をそれぞれ行列の『行・列』と解釈し，上記の結果を行列表記すると次のようになる。

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\mu=1}^{m} Y_\mu^b X_a^\mu = \delta_a^b \ \to \ YX = E_n & (n\text{ 次の単位行列}) \\ \displaystyle\sum_{a=1}^{n} X_a^\mu Y_\nu^a = \delta_\nu^\mu \ \to \ XY = E_m & (m\text{ 次の単位行列}) \end{cases} \qquad \therefore \text{両辺の行列式} \ \to \ \det(XY) = \det(YX) = 1$$

以下のように $m \neq n$ のときは $\det(XY)$ と $\det(YX)$ の少なくとも一方が必ず 0 になるため，$m = n$ である。

定理 $n < m$ のとき，任意の $m \times n$ 行列 A と任意の $n \times m$ 行列 B について，$\det(AB) = 0$ が成り立つ。

$$\text{行列式の定義}:\det(AB) = \sum_{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_m=1}^{m} \epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} (AB)_1^{\mu_1} (AB)_2^{\mu_2} \cdots (AB)_m^{\mu_m}, \qquad (AB)_\nu^\mu = \sum_{a=1}^{n} A_a^\mu B_\nu^a$$

$$\text{ここで，}\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} \equiv \begin{cases} +1 & (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)\text{ が }(1, 2, \cdots, m)\text{ の偶置換} \\ -1 & (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)\text{ が }(1, 2, \cdots, m)\text{ の奇置換} \\ 0 & \text{上記以外の場合すべて} \end{cases} \qquad \text{（レヴィ・チヴィタ記号）}$$

$$\therefore \ \det(AB) = \sum_{a_1,\ \cdots,\ a_m=1}^{n} B_1^{a_1} \cdots B_i^{a_i} \cdots B_k^{a_k} \cdots B_m^{a_m} \sum_{\mu_1,\ \cdots,\ \mu_m=1}^{m} \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_k\cdots\mu_m} A_{a_1}^{\mu_1} \cdots A_{a_i}^{\mu_i} \cdots A_{a_k}^{\mu_k} \cdots A_{a_m}^{\mu_m}$$

いま，$\mu_1 \cdots \mu_m$ についての和を考える。このとき $n < m$ より，m 個の自然数 $a_1 \cdots a_m$ のうち，少なくとも 1 組は同じ値になる。それを $(a_i, a_k) \equiv (a, a)$ として，μ_i と μ_k の和の部分に着目する。

$$\begin{cases} \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_k\cdots\mu_m} = -\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_k\cdots\mu_i\cdots\mu_m} & : \ (\mu_i, \mu_k)\text{ について反対称} \\ A_a^{\mu_i} A_a^{\mu_k} = A_a^{\mu_k} A_a^{\mu_i} & : \ (\mu_i, \mu_k)\text{ について対称} \end{cases} \quad \to \quad \sum_{\mu_i,\ \mu_k=1}^{m} \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_k\cdots\mu_m} A_a^{\mu_i} A_a^{\mu_k} = 0$$

3. 双対空間

ここでは，双対空間の任意の元（双対ベクトル）を $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ 等で表す。

定義 線形空間 V の元を変数とする汎関数の集合 V^* が次の性質を満たすとき，V^* を V の双対空間という。

(a) V^* は線形空間（V^* の元の線形和は V^* の元）：$(a\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + b\tilde{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{v}) \equiv a\Big(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v})\Big) + b\Big(\tilde{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{v})\Big) \to a\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + b\tilde{\boldsymbol{\mu}} \in V^*$

(b) $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ は線形汎関数：$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}) + b\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v})$ ※ $a = b = 0$ として $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{0}) = 0$ が得られる。

(c) $\tilde{\mathbf{0}}(\mathbf{v}) = 0$ を満たす零関数 $\tilde{\mathbf{0}}$ の存在：$(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \tilde{\mathbf{0}})(\mathbf{v}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) + \tilde{\mathbf{0}}(\mathbf{v}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v})$ より，$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \tilde{\mathbf{0}} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ $\therefore \tilde{\mathbf{0}}$は$V^*$の零元。

※ V の任意の基底 $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ に対し，V^* の元 $\tilde{\mathbf{e}}^1, \cdots, \tilde{\mathbf{e}}^n$ を関係式 $\tilde{\mathbf{e}}^a(\mathbf{e}_b) = \delta_b^a$ を満たすものとして定義する。

このとき，次のように $v^a = \tilde{\mathbf{e}}^a(\mathbf{v})$ が成り立つ。$\tilde{\mathbf{e}}^a(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{e}}^a \left(\displaystyle\sum_{b=1}^{n} v^b \mathbf{e}_b \right) = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} v^b \Big\{ \tilde{\mathbf{e}}^a(\mathbf{e}_b) \Big\} = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} v^b \delta_b^a = v^a$

定理 双対空間 V^* は，$\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \cdots \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ を基底（双対基底）とする線形空間である。 $\therefore$ dim$V$ =dim$V^* = n$

(a) $\tilde{\mathbf{e}}^a$ が V^* を張ること： $\lambda_a \equiv \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{e}_a)$ で実数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を定義する。$\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} v^a \mathbf{e}_a$ を V の任意の元とする。

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \left(\sum_{a=1}^{n} v^a \mathbf{e}_a \right) = \sum_{a=1}^{n} v^a \underline{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{e}_a)} = \sum_{a=1}^{n} \underline{\underline{v^a}}\ \underline{\lambda_a} = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \underline{\underline{\tilde{\mathbf{e}}^a(\mathbf{v})}} = \left(\sum_{a=1}^{n} \lambda_a \tilde{\mathbf{e}}^a \right)(\mathbf{v}) \qquad \therefore \ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \tilde{\mathbf{e}}^a$$

(b) 線形独立性：$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \tilde{\mathbf{0}}$ のとき，任意の $v^1 \cdots v^n$ に対して $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{v}) = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} \lambda_a v^a = 0$ である。これが成り立つのは，

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ のときのみ。