3. 赤道面上の軌道：粒子と光線　※ $\epsilon_g \equiv -\dfrac{2E}{c^2} \equiv -\dfrac{2L}{c^2}$，$h \equiv r^2\dot{\phi} > 0$，$a_N \equiv \dfrac{h^2}{GM}$，$u \equiv \dfrac{a_N}{r}$

≪軌道方程式≫
$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{d\phi}\right)^2 - \epsilon_g u + \dfrac{1}{2}u^2 - \left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2 u^3 = \mathcal{E}_g & (1) \quad ※\ \mathcal{E}_g \equiv \dfrac{1}{2}(k^2-\epsilon_g)\left(\dfrac{hc}{GM}\right)^2 \\ \cdot\ \dfrac{d^2u}{d\phi^2} - \epsilon_g + u - 3\left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2 u^2 = 0 & (2) \quad ※\ 方程式(1)の\ \phi\ 微分 \end{cases}$$

(a) アフィン・パラメータ λ の選び方

※ アフィン・パラメータ λ には，その次元も含め，0 を除く任意定数を掛ける自由度がある。

・時間的測地線：$d\tau \equiv \dfrac{\sqrt{-ds^2}}{c} > 0$ で定義される固有時 τ を λ とする。 ※ $2E = -c^2$ となり，$\epsilon_g = 1$

・光線的測地線：$ds^2 = 0$ なので固有時 τ を λ とすることができない。関連して，光線軌道では $\epsilon_g = 0$ である。以下では r_0 を正定数として，$2\mathcal{E}_g = \left(\dfrac{a_N}{r_0}\right)^2$ となるように λ を選ぶ。このとき，後述するように，r_0 はニュートン極限での光線軌道の『近日点距離』である。

・$\epsilon_g \equiv -\dfrac{2E}{c^2} = \begin{cases} 1 & （粒子）\\ 0 & （光線）\end{cases}$ とする場合，$(\epsilon_g)^2 = \epsilon_g$ が成り立つ。

(b) ニュートン極限（$c \to \infty$ 極限）

※ ニュートン力学での軌道方程式は，方程式 (1) と (2) で $\alpha \equiv \left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2 \to 0$ として得られる。

$\therefore$ (2) で $u_N \equiv \lim\limits_{\alpha\to 0} u$，$r_N \equiv \dfrac{a_N}{u_N}$ として，$\dfrac{d^2}{d\phi^2}(u_N - \epsilon_g) + (u_N - \epsilon_g) = 0$ ： $\dfrac{d}{d\phi}\epsilon_g = \dfrac{d^2}{d\phi^2}\epsilon_g = 0$ を用いた。

・これは $(u_N - \epsilon_g)$ が ϕ について周期 2π で振動するときの微分方程式であり，一般解は $e_N \geq 0$ と ϕ_0 を積分定数として，$u_N - \epsilon_g = e_N \sin(\phi + \phi_0)$ である。物理的に重要ではない ϕ_0 について，粒子（$\epsilon_g = 1$）に対しては $\phi_0 = \dfrac{\pi}{2}$，光線（$\epsilon_g = 0$）に対しては $\phi_0 = 0$ とする。式 (1) の極限（$\alpha \to 0$）を取ることにより，定数 e_N と $\mathcal{E}_g$ の間の関係式 $2\mathcal{E}_g = {e_N}^2 - \epsilon_g$ が得られる。

$$\begin{cases} \cdot\ 粒子（\epsilon_g = 1）:\ r_N = \dfrac{a_N}{1 + e_N\cos\phi} & ※\ 近日点（\phi = 0）は\ \dfrac{a_N}{1+e_N}，e_N = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}_g}\ は離心率 \\ \cdot\ 光線（\epsilon_g = 0）:\ r_N = \dfrac{r_0}{\sin\phi}（直線：Y = r_0） & ※\ 近日点（\phi = \pi/2）は\ r_0，e_N = \sqrt{2\mathcal{E}_g} = \dfrac{a_N}{r_0} \end{cases}$$

(c) 円軌道に対する相対論効果　※ 以下では複号同順とする。

※ 円軌道（r が一定値）は，方程式 (1) の $\dfrac{du}{d\phi}$ と方程式 (2) の $\dfrac{d^2u}{d\phi^2}$ を共に 0 として得られる。

≪円軌道の式≫
$$\begin{cases} \cdot\ 2\alpha u^3 - u^2 + 2\epsilon_g u = -2\mathcal{E}_g & (1)' \\ \cdot\ 3\alpha u^2 - u + \epsilon_g = 0 & (2)' \end{cases} \qquad ※\ 弱い重力場では\ \alpha \equiv \left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2 \ll 1$$

※ 方程式 $(2)'$ が u を決定し，この u に対して方程式 $(1)'$ が $\mathcal{E}_g$ を決定する。

※ $u = \dfrac{h^2}{GMr}$ より，ブラックホールの外側にある円軌道（$r_g < r < \infty$）に対し，$0 < u < \dfrac{1}{2\alpha}$ となる。

(c-1) 光線の円軌道 $\epsilon_g = 0$ ： $3\alpha u^2 - u = 0$ より，$u = \dfrac{1}{3\alpha}$　　$\therefore$ $r = \dfrac{h^2}{GMu} = \dfrac{3\alpha h^2}{GM} = \dfrac{3GM}{c^2} = \dfrac{3}{2}r_g$

光線の円軌道の半径は $a_0 = \dfrac{3}{2}r_g$ で，h にはよらない。後述するように，この円軌道は不安定なため，現実の光線はブラックホールに落ち込むか，さもなくば無限遠方へ飛び去る。

(c-2) 粒子の円軌道 $\epsilon_g = 1$ ： $3\alpha u^2 - u + 1 = 0$ より，$u = \dfrac{1}{6\alpha}\left(1 \mp \sqrt{1-12\alpha}\right) = \dfrac{2}{1 \pm \sqrt{1-12\alpha}} \equiv u_\pm$

$\therefore$ 粒子の円軌道は $\alpha \equiv \left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2 \leq \dfrac{1}{12}$ のときにのみ，存在する。

・公転半径：$a_\pm \equiv \dfrac{a_N}{u_\pm} = \dfrac{a_N}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-12\alpha}\right)$ ※ $1 - 12\alpha \geq 0$ が必要

・公転半径を $a_\pm = \dfrac{3r_g}{1 \mp \sqrt{1-12\alpha}}$ と表すこともできる。 $\therefore\ \dfrac{3}{2}r_g < a_- \leq 3r_g \leq a_+ < \infty$

粒子の円軌道が存在するための条件 $\alpha \leq \dfrac{1}{12}$ より，保存量 h に対する条件 $h \geq h_* \equiv \sqrt{12}\dfrac{GM}{c} = \sqrt{3}r_g c$ が得られる。つまり，h_* よりも遅い回転では遠心力と重力の釣り合いが保てず，円軌道が不可能となる。なお，$h = h_*$ のとき，$a_- = a_+ = \dfrac{6GM}{c^2} = 3r_g$ である。

(c-3) 円軌道の安定性

≪ r 方向の運動≫ $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + V_g(r) = E_g$, $V_g(r) = -\epsilon_g\dfrac{GM}{r} + \dfrac{h^2}{2r^2} - \dfrac{GMh^2}{r^3c^2}$ (3)

・方程式 (3) は，ニュートン力学でのエネルギー保存則と同じ形をしている。すなわち，E_g が単位質量あたりの全エネルギー，$\dfrac{\dot{r}^2}{2}$ が運動エネルギー，$V_g(r)$ がポテンシャルエネルギーにそれぞれ対応する。したがって，円軌道における r 方向の運動は,『ポテンシャル $V_g(r)$ のグラフの平らな場所に静止』した状態と解釈される。

・円軌道の式（ポテンシャル $V_g(r)$ の極値点） ： $\dfrac{dV_g(r)}{dr} = \epsilon_g\dfrac{GM}{r^2} - \dfrac{h^2}{r^3} + \dfrac{3GMh^2}{r^4c^2} = 0$

・粒子および光線の円軌道は，$V_g(r)$ のグラフの形により次のように分類される。

$$\begin{cases} \cdot\ \text{下に凸}\ :\ \dfrac{d^2V_g(r)}{dr^2} > 0 \implies \text{安定（ポテンシャルの『谷』付近に留まり続ける。）} \\ \cdot\ \text{上に凸}\ :\ \dfrac{d^2V_g(r)}{dr^2} < 0 \implies \text{不安定（ポテンシャルの『山』から容易に転がり落ちる。）} \end{cases}$$

$$\frac{d^2V_g(r)}{dr^2} = -\epsilon_g\frac{2GM}{r^3} + \frac{3h^2}{r^4} - \frac{12GMh^2}{r^5c^2} = \epsilon_g\frac{2GM}{r^3} - \frac{h^2}{r^4} = \begin{cases} -\dfrac{h^2}{r^4} < 0 & :\ \text{光線（}\ \epsilon_g = 0\ \text{）} \\ \dfrac{2GM}{r^4}\left(r - \dfrac{a_N}{2}\right) & :\ \text{粒子（}\ \epsilon_g = 1\ \text{）} \end{cases}$$

ここで，２つめの等号では，$\dfrac{dV_g(r)}{dr} = 0$ から得られる等式 $\dfrac{12GMh^2}{r^5c^2} = -\epsilon_g\dfrac{4GM}{r^3} + \dfrac{4h^2}{r^4}$ を用いた。

$$\text{・粒子の円軌道：}\begin{cases} a_- < \dfrac{a_N}{2}\ \text{より}\ a_-\ \text{は不安定,}\ a_+ > \dfrac{a_N}{2}\ \text{より}\ a_+\ \text{は安定} & :\ h > \sqrt{3}r_g c \\ a_- = a_+ = 3r_g\ \ \text{Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)} & :\ h = \sqrt{3}r_g c \\ \text{円軌道の消失} & :\ h < \sqrt{3}r_g c \end{cases}$$

・光線の円軌道：唯一の円軌道 $a_0 = \dfrac{3}{2}r_g$ は不安定。