〔リーマン幾何学〕　※ 定義と基本公式の導出（計算の詳細など）

1. 計量テンソルと接続

(a) 計量によるベクトルの内積

$$\begin{cases} \cdot\ \text{接線型ベクトルの内積}\ :\ \boldsymbol{g}(\vec{u},\vec{v}) = g_{ab}u^a v^b, \quad \text{ここで}\ \ g_{ab} = g_{ba} & (\vec{u}\ \text{と}\ \vec{v}\ \text{は任意の接ベクトル}) \\ \cdot\ \text{勾配型ベクトルの内積}\ :\ \boldsymbol{g}^{-1}(\tilde{\mu},\tilde{\omega}) = g^{ab}\mu_a\omega_b, \quad \text{ここで}\ \ g^{ab} = g^{ba} & (\tilde{\mu}\ \text{と}\ \tilde{\omega}\ \text{は任意の１形式}) \end{cases}$$

ここで，g_{ab} と g^{ab} は逆行列の関係式 $g^{ac}g_{cb} = g_{bc}g^{ca} = \delta^a_b$ を満たす。

※ 計量を幾何学の基本と考えるので，g_{ab} が発散する点と $\det(g_{ab}) = 0$ となる点では座標 (x) が定義されない。

(b) 接続係数と微分公式（共変微分）　※ 座標系 (x) のすべての点で $\Gamma^a_{bc} = 0$ となるとき，**平坦な接続**という。

・座標基底の微分の定義：
$$\begin{cases} \partial_c \boldsymbol{e}_a \equiv \Gamma^d_{ac}\boldsymbol{e}_d & (\boldsymbol{e}_a \equiv \vec{e}_a\ \text{は接ベクトルの座標基底}) \\ \partial_c \boldsymbol{e}^b \equiv -\Gamma^b_{dc}\boldsymbol{e}^d & (\boldsymbol{e}^a \equiv \tilde{e}^a\ \text{は１形式の座標基底}) \end{cases}$$

・微分公式の導出例：$\boldsymbol{A} = A^a{}_b\boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}^b$ を任意の (1,1) 型テンソルとする。

$$\begin{aligned} \partial_c\boldsymbol{A} &= \partial_c\Big(\sum_{a,b=1}^{n} A^a{}_b\boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}^b\Big) \quad :\ \text{和記号を一時的に明記する。} \\ &= \sum_{a,b=1}^{n}\partial_c\left(A^a{}_b\boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}^b\right) \quad :\ \text{線形則（微分は和と可換）}\quad ※\ \text{以下では和記号を省略する。} \\ &= (\partial_c A^a{}_b)\boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}^b + A^a{}_b\Big\{(\partial_c\boldsymbol{e}_a)\otimes\boldsymbol{e}^b + \boldsymbol{e}_a\otimes(\partial_c\boldsymbol{e}^b)\Big\} \quad :\ \text{積の微分則（ライプニッツ則）} \\ &= (\partial_c A^a{}_b)\boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}^b + A^a{}_b\Big\{(\Gamma^d_{ac}\boldsymbol{e}_d)\otimes\boldsymbol{e}^b + \boldsymbol{e}_a\otimes(-\Gamma^b_{dc}\boldsymbol{e}^d)\Big\} \quad :\ \text{添字の変更}\left\{\begin{array}{l} 2\ \text{項目}\ a\leftrightarrow d \\ 3\ \text{項目}\ b\leftrightarrow d \end{array}\right.\text{をおこなう。} \\ &= \Big(\partial_c A^a{}_b + \Gamma^a_{dc}A^d{}_b - \Gamma^d_{bc}A^a{}_d\Big)\,\boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}^b \equiv (\nabla_c A^a{}_b)\ \boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}^b \end{aligned}$$

ここで定義した $\nabla_c A^a{}_b \equiv (\partial_c\boldsymbol{A})^a{}_b = \partial_c A^a{}_b + \Gamma^a_{dc}A^d{}_b - \Gamma^d_{bc}A^a{}_d$ を $A^a{}_b$ の**共変微分**という。

公式　$\nabla_c\delta^a_b = 0\ :\ \nabla_c\delta^a_b = \partial_c\delta^a_b + \Gamma^a_{dc}\delta^d_b - \Gamma^d_{bc}\delta^a_d = 0 + \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{bc} = 0 \qquad \therefore\ \delta^a_b\boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}^b$ は**定テンソル**

(c) リーマン接続（計量接続）

定理　次の２つの要請を満たす接続係数は一意的に，$\Gamma^c_{ab} = \dfrac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$ と決まる。

$$\begin{cases} \Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} \quad \therefore\ T^c_{ab} \equiv \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} = 0 & :\ \textbf{対称な接続（ねじれテンソル}\ T^c_{ab}\boldsymbol{e}_c\otimes\boldsymbol{e}^a\otimes\boldsymbol{e}^b\ \textbf{が 0）} \\ \nabla_c g_{ab} \equiv (\partial_c\boldsymbol{g})_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^d_{ac}g_{db} - \Gamma^d_{bc}g_{ad} = 0 & :\ \textbf{計量}\ \boldsymbol{g} = g_{ab}\boldsymbol{e}^a\otimes\boldsymbol{e}^b\ \textbf{は定テンソル} \end{cases}$$

（証明）　記号 Γ_{dab} を $\Gamma_{dab} \equiv g_{de}\Gamma^e_{ab} = g_{ed}\Gamma^e_{ab}$ で定義すると，対称な接続では $\Gamma_{dab} = \Gamma_{dba}$ となる。また，上記の要請より，$0 = \nabla_a g_{bd} = \partial_a g_{bd} - \Gamma^e_{ba}g_{ed} - \Gamma^e_{da}g_{be} = \partial_a g_{bd} - \Gamma_{dba} - \Gamma_{bda} \Longleftrightarrow \partial_a g_{bd} = \Gamma_{dba} + \Gamma_{bda}$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 &= g^{cd}\Big(\nabla_a g_{bd} + \nabla_b g_{ad} - \nabla_d g_{ab}\Big) \quad :\ \text{カッコの中は，添字の交換}\ a\leftrightarrow b\ \text{に対して対称な組み合わせ} \\ &= g^{cd}\Big\{(\partial_a g_{bd} - \boxed{\Gamma_{dba}} - \underline{\Gamma_{bda}}\,) + (\partial_b g_{ad} - \boxed{\Gamma_{dab}} - \underline{\underline{\Gamma_{adb}}}) - (\partial_d g_{ab} - \underline{\Gamma_{bad}} - \underline{\underline{\Gamma_{abd}}})\Big\} \quad :\ \Gamma_{dba} = \Gamma_{dab}\ \ \text{etc.} \\ &= g^{cd}\Big(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab} - 2\,\boxed{\Gamma_{dab}}\Big) \qquad \therefore\ g^{cd}\Gamma_{dab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \end{aligned}$$

ここで $g^{cd}\Gamma_{dab} = g^{cd}g_{de}\Gamma^e_{ab} = \delta^c_e\Gamma^e_{ab} = \Gamma^c_{ab}$ となり，$\Gamma^c_{ab} = g^{cd}\Gamma_{dab} = \dfrac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$ が得られる。

公式　$\nabla_c\delta^a_d = 0$ と $\nabla_c g_{ed} = 0$ より，以下のように $\nabla_c g^{ab} = 0$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 &= g^{db}\nabla_c\delta^a_d = g^{db}\nabla_c(g^{ae}\cdot g_{ed}) = g^{db}\left(\nabla_c g^{ae}\cdot g_{ed} + g^{ae}\cdot\nabla_c g_{ed}\right) = g^{db}\left(\nabla_c g^{ae}\cdot g_{ed} + g^{ae}\cdot 0\right) \\ &= g_{ed}g^{db}\nabla_c g^{ae} = \delta^b_e\nabla_c g^{ae} = \nabla_c(g^{ae}\cdot\delta^b_e) - g^{ae}\cdot\nabla_c\delta^b_e = \nabla_c g^{ab} - g^{ae}\cdot 0 \\ &= \nabla_c g^{ab} \qquad \therefore\ g^{ab}\boldsymbol{e}_a\otimes\boldsymbol{e}_b\ \text{は}\textbf{定テンソル} \end{aligned}$$

2. 対称な接続の局所平坦性　※ 座標系 (x) のすべての点で $\Gamma^a_{bc}=\Gamma^a_{cb}$ となるとき，**対称な接続**という。

(a) ヤコビ行列とその微分

座標変換 $(x)\to(x')$ に対し，
$$\begin{cases} X^{a'}_b \equiv \dfrac{\partial x^{a'}(x)}{\partial x^b}, \quad X^a_{b'} \equiv \dfrac{\partial x^a(x')}{\partial x^{b'}} \\ X^a_{b'c'} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^{c'}} X^a_{b'} = \dfrac{\partial^2 x^a}{\partial x^{c'}\partial x^{b'}} = \dfrac{\partial^2 x^a}{\partial x^{b'}\partial x^{c'}} = X^a_{c'b'} \ \text{：座標関数の偏微分は可換} \end{cases}$$

(b) 接続係数の変換公式：
$$\begin{cases} \Gamma^c_{ab}\,\boldsymbol{e}_c \equiv \partial_b \boldsymbol{e}_a \quad \text{in } (x) \quad ※\ \boldsymbol{e}_a \equiv \vec{e}_a = X^{c'}_a \vec{e}_{c'} \\ \Gamma^{c'}_{a'b'}\boldsymbol{e}_{c'} \equiv \partial_{b'} \boldsymbol{e}_{a'} \quad \text{in } (x') \quad ※\ \boldsymbol{e}_{a'} \equiv \vec{e}_{a'} = X^d_{a'}\vec{e}_d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{c'}_{a'b'}\boldsymbol{e}_{c'} &\equiv \partial_{b'}\boldsymbol{e}_{a'} = \partial_{b'}(X^d_{a'}\boldsymbol{e}_d) = (\partial_{b'}X^d_{a'})\boldsymbol{e}_d + X^d_{a'}(\partial_{b'}\boldsymbol{e}_d) = X^d_{a'b'}\boldsymbol{e}_d + X^d_{a'}(X^e_{b'}\partial_e \boldsymbol{e}_d) \\ &= X^d_{a'b'}\boldsymbol{e}_d + X^d_{a'}X^e_{b'}\Gamma^f_{de}\boldsymbol{e}_f = X^d_{a'b'}(X^{c'}_d \boldsymbol{e}_{c'}) + X^d_{a'}X^e_{b'}\Gamma^f_{de}(X^{c'}_f \boldsymbol{e}_{c'}) \\ &= \left\{X^d_{a'}X^e_{b'}X^{c'}_f\Gamma^f_{de} + X^{c'}_d X^d_{a'b'}\right\}\boldsymbol{e}_{c'} \qquad \therefore\ \Gamma^{c'}_{a'b'} = X^d_{a'}X^e_{b'}X^{c'}_f\Gamma^f_{de} + X^{c'}_d X^d_{a'b'} \end{aligned}$$

(c) 対称な接続の局所平坦性定理　※ 必要に応じて，以下では和記号を明記することがある。

定理 $\Gamma^c_{ab}=\Gamma^c_{ba}$ のとき,（任意の）着目点 p について，適当な座標変換 $(x)\to(x')$ により $\Gamma^{c'}_{a'b'}(p)=0$ とできる。

関係式 $x^a - x^a(p) = x^{a'} - x^{a'}(p) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{b,c=1}^n \Gamma^a_{bc}(p)\left(x^{b'}-x^{b'}(p)\right)\left(x^{c'}-x^{c'}(p)\right)$ で座標系 (x') を定義する。

このとき，自明な等式 $\left(x^{a'}-x^{a'}(p)\right)_p = 0$ と $\partial_{d'}\left(x^{a'}-x^{a'}(p)\right) = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^{d'}} = \delta^{a'}_{d'}$ より，次の公式が得られる。

- $$\begin{aligned} \frac{\partial x^a}{\partial x^{d'}} &= \partial_{d'}\left\{x^{a'}-x^{a'}(p)\right\} - \frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^n \Gamma^a_{bc}(p)\,\partial_{d'}\left\{\left(x^{b'}-x^{b'}(p)\right)\left(x^{c'}-x^{c'}(p)\right)\right\} \\ &= \delta^{a'}_{d'} - \frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^n \Gamma^a_{bc}(p)\left\{\delta^{b'}_{d'}\ \left(x^{c'}-x^{c'}(p)\right) + \left(x^{b'}-x^{b'}(p)\right)\ \delta^{c'}_{d'}\right\} \end{aligned}$$
$$\therefore\ \begin{cases} X^a_{d'}(p) \equiv \left(\dfrac{\partial x^a}{\partial x^{d'}}\right)_p = \delta^{a'}_{d'} = \delta^a_d \\ X^{b'}_a(p)\ \text{は}\ X^a_{d'}(p) = \delta^{a'}_{d'} = \delta^a_d\ \text{と逆行列の関係にあるので，}\ X^{b'}_a(p) = \delta^{b'}_{a'} = \delta^b_a \end{cases}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{e'}}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{d'}}\right) &= \partial_{e'}\ \delta^{a'}_{d'} - \frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^n \Gamma^a_{bc}(p)\ \partial_{e'}\left\{\delta^{b'}_{d'}\ \left(x^{c'}-x^{c'}(p)\right) + \left(x^{b'}-x^{b'}(p)\right)\ \delta^{c'}_{d'}\right\} \\ &= 0 - \frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^n \Gamma^a_{bc}(p)\left(\delta^{b'}_{d'}\delta^{c'}_{e'} + \delta^{b'}_{e'}\delta^{c'}_{d'}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{b,c=1}^n\left(\Gamma^a_{bc}(p)\delta^b_d\delta^c_e + \Gamma^a_{bc}(p)\delta^b_e\delta^c_d\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\Gamma^a_{de}(p) + \Gamma^a_{ed}(p)\right) = -\Gamma^a_{de}(p) \ \text{：}\ \Gamma^a_{de}(p) = \Gamma^a_{ed}(p)\ \text{より} \end{aligned}$$
$$\therefore\ X^d_{a'b'}(p) = X^d_{b'a'}(p) = \left(\frac{\partial^2 x^d}{\partial x^{a'}\partial x^{b'}}\right)_p = \left[\frac{\partial}{\partial x^{a'}}\left(\frac{\partial x^d}{\partial x^{b'}}\right)\right]_p = -\Gamma^d_{ab}(p) = -\Gamma^d_{ba}(p)$$

Γ^c_{ab} の変換公式を用いて以下のように，対称な接続に対して $\Gamma^{c'}_{a'b'}(p)=0$ が示される。

$$\Gamma^{c'}_{a'b'}(p) = (X^d_{a'}X^e_{b'}X^{c'}_f\Gamma^f_{de} + X^{c'}_d X^d_{a'b'})_p = \delta^d_a\delta^e_b\delta^c_f\Gamma^f_{de}(p) + \delta^c_d(-\Gamma^d_{ab}(p)) = \Gamma^c_{ab}(p) - \Gamma^c_{ab}(p) = 0$$

(d) 計量の局所平坦性定理　※ 接続係数 Γ^c_{ab} について，**リーマン接続**の場合を考える。

補助定理 リーマン接続では $\Gamma^c_{ab} = g^{cd}\Gamma_{dab} = \dfrac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) = \Gamma^c_{ba}$ なので，$\Gamma^{c'}_{a'b'}(p)=0$ が可能。

定理 $\det(g_{a'b'})\neq 0$ のとき，次の**同値関係**が成り立つ。 $\Gamma_{c'a'b'}(p)=0 \iff \Gamma^{c'}_{a'b'}(p)=0 \iff \left(\dfrac{\partial g_{a'b'}}{\partial x^{c'}}\right)_p = 0$

補足 任意の着目点 p について，補助定理より，$\Gamma^{c'}_{a'b'}(p)=0$ が成り立つ座標系 (x') が必ず存在する。このとき
$\dfrac{\partial g_{a'b'}}{\partial x^{c'}} = \Gamma_{a'b'c'} + \Gamma_{b'a'c'} = g_{a'd'}\Gamma^{d'}_{b'c'} + g_{b'd'}\Gamma^{d'}_{a'c'}$ より，$\left(\dfrac{\partial g_{a'b'}}{\partial x^{c'}}\right)_p = 0$ も成り立つ。　**（計量の局所平坦性）**

3. 曲率テンソル

(a) 微分交換子と曲率テンソル

定義 接ベクトルの座標基底を $\boldsymbol{e}_a$ として，多様体の “曲がり具合” を次の関係式で定義される $R^a{}_{bcd}$ で表す。

$R^a{}_{bcd}\boldsymbol{e}_a \equiv \partial_c(\partial_d \boldsymbol{e}_b) - \partial_d(\partial_c \boldsymbol{e}_b)$ ： 微分の順番が $d \to c$ の場合と $c \to d$ の場合との差

公式 1 以下のように，関係式 $R^a{}_{bcd} = \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} = -R^a{}_{bdc}$ が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\partial_c(\partial_d \boldsymbol{e}_b) &= \partial_c(\Gamma^a_{bd}\boldsymbol{e}_a) = (\partial_c\Gamma^a_{bd})\boldsymbol{e}_a + \Gamma^a_{bd}(\partial_c \boldsymbol{e}_a) \\
&= (\partial_c\Gamma^a_{bd})\boldsymbol{e}_a + \Gamma^a_{bd}(\Gamma^e_{ac}\boldsymbol{e}_e) \quad \text{：２項目の添字の役割交換 } a \leftrightarrow e \text{ をおこなう。} \\
&= (\partial_c\Gamma^a_{bd})\,\boldsymbol{e}_a + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec}\boldsymbol{e}_a = (\partial_c\Gamma^a_{bd} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec})\,\boldsymbol{e}_a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ R^a{}_{bcd}\boldsymbol{e}_a &\equiv \partial_c(\partial_d \boldsymbol{e}_b) - \partial_d(\partial_c \boldsymbol{e}_b) = (\partial_c\Gamma^a_{bd} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec})\,\boldsymbol{e}_a - (\partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed})\,\boldsymbol{e}_a \\
&= (\partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed})\,\boldsymbol{e}_a
\end{aligned}
$$

公式 2 １形式の座標基底を $\boldsymbol{e}^a$ として，関係式 $\partial_c(\partial_d \boldsymbol{e}^a) - \partial_d(\partial_c \boldsymbol{e}^a) = -R^a{}_{bcd}\boldsymbol{e}^b = R^a{}_{bdc}\boldsymbol{e}^b$ が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\partial_c(\partial_d \boldsymbol{e}^a) &= \partial_c(-\Gamma^a_{bd}\boldsymbol{e}^b) = (-\partial_c\Gamma^a_{bd})\boldsymbol{e}^b - \Gamma^a_{bd}(\partial_c \boldsymbol{e}^b) \\
&= (-\partial_c\Gamma^a_{bd})\boldsymbol{e}^b - \Gamma^a_{bd}(-\Gamma^b_{ec}\boldsymbol{e}^e) \quad \text{：２項目の添字の役割交換 } b \leftrightarrow e \text{ をおこなう。} \\
&= (-\partial_c\Gamma^a_{bd})\,\boldsymbol{e}^b + \Gamma^a_{ed}\Gamma^e_{bc}\boldsymbol{e}^b = -\,(\partial_c\Gamma^a_{bd} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed})\,\boldsymbol{e}^b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \partial_c(\partial_d \boldsymbol{e}^a) - \partial_d(\partial_c \boldsymbol{e}^a) &= -\,(\partial_c\Gamma^a_{bd} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed})\,\boldsymbol{e}^b + (\partial_d\Gamma^a_{bc} - \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec})\,\boldsymbol{e}^b \\
&= -(\partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed})\boldsymbol{e}^b \\
&= -R^a{}_{bcd}\boldsymbol{e}^b = R^a{}_{bdc}\boldsymbol{e}^b
\end{aligned}
$$

公式 3 $\boldsymbol{A}$ を任意のテンソルとして，$\Big\{\partial_c(\partial_d\boldsymbol{A}) - \partial_d(\partial_c\boldsymbol{A})\Big\}$ は一般座標変換 $(x) \to (x')$ のもとで，添字の組 (c,d) について $(0,2)$ 型テンソルの成分と同じ変換をする。

- $\partial_{c'}(\partial_{d'}\boldsymbol{A}) = \partial_{c'}(X^b_{d'}\partial_b\boldsymbol{A}) = (\partial_{c'}X^b_{d'})(\partial_b\boldsymbol{A}) + X^b_{d'}\partial_{c'}(\partial_b\boldsymbol{A}) = X^b_{d'c'}(\partial_b\boldsymbol{A}) + X^b_{d'}X^a_{c'}\partial_a(\partial_b\boldsymbol{A})$
- $\partial_{d'}(\partial_{c'}\boldsymbol{A}) = X^b_{c'd'}(\partial_b\boldsymbol{A}) + \underline{X^b_{c'}X^a_{d'}\partial_a(\partial_b\boldsymbol{A})} = X^b_{c'd'}(\partial_b\boldsymbol{A}) + \underline{X^a_{c'}X^b_{d'}\partial_b(\partial_a\boldsymbol{A})}$ ： $\underline{\text{添字の役割交換 } a \leftrightarrow b}$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \Big\{\partial_{c'}(\partial_{d'}\boldsymbol{A}) - \partial_{d'}(\partial_{c'}\boldsymbol{A})\Big\} &= \Big\{X^b_{d'c'}(\partial_b\boldsymbol{A}) + X^b_{d'}X^a_{c'}\partial_a(\partial_b\boldsymbol{A})\Big\} - \Big\{X^b_{c'd'}(\partial_b\boldsymbol{A}) + X^a_{c'}X^b_{d'}\partial_b(\partial_a\boldsymbol{A})\Big\} \\
&= (\underline{\underline{X^b_{d'c'}}} - X^b_{c'd'})(\partial_b\boldsymbol{A}) + X^a_{c'}X^b_{d'}\Big\{\partial_a(\partial_b\boldsymbol{A}) - \partial_b(\partial_a\boldsymbol{A})\Big\} \quad \text{：} \underline{\underline{X^b_{d'c'} = X^b_{c'd'}}} \\
&= X^a_{c'}X^b_{d'}\Big\{\partial_a(\partial_b\boldsymbol{A}) - \partial_b(\partial_a\boldsymbol{A})\Big\} \quad \text{：添字の組 } (c',d') \text{ について } (0,2) \text{ 型の変換}
\end{aligned}
$$

定理 $R^a{}_{bcd}$ は一般座標変換 $(x) \to (x')$ のもとで，$(1,3)$ 型テンソルの成分と同じ変換をする。

（証明） **定義式** $R^a{}_{bcd}\boldsymbol{e}_a \equiv \partial_c\partial_d\boldsymbol{e}_b - \partial_d\partial_c\boldsymbol{e}_b$ と**公式 3** より，$R^a{}_{bcd}$ は下添字の組 (c,d) について $(0,2)$ 型テンソルの成分と同じ変換をする。したがって，上添字 a と下添字 b について調べればよい。

- $\partial_{c'}(\partial_{d'}\boldsymbol{e}_{b'}) = \partial_{c'}\{\partial_{d'}(X^e_{b'}\boldsymbol{e}_e)\} = \partial_{c'}\{(\partial_{d'}X^e_{b'})\boldsymbol{e}_e + X^e_{b'}(\partial_{d'}\boldsymbol{e}_e)\}$
  $= \underline{(\partial_{c'}\partial_{d'}X^e_{b'})}\boldsymbol{e}_e + \underline{\underline{(\partial_{d'}X^e_{b'})(\partial_{c'}\boldsymbol{e}_e) + (\partial_{c'}X^e_{b'})(\partial_{d'}\boldsymbol{e}_e)}} + X^e_{b'}\cdot\partial_{c'}(\partial_{d'}\boldsymbol{e}_e)$
- $\partial_{d'}(\partial_{c'}\boldsymbol{e}_{b'}) = \underline{(\partial_{d'}\partial_{c'}X^e_{b'})}\boldsymbol{e}_e + \underline{\underline{(\partial_{c'}X^e_{b'})(\partial_{d'}\boldsymbol{e}_e) + (\partial_{d'}X^e_{b'})(\partial_{c'}\boldsymbol{e}_e)}} + X^e_{b'}\cdot\partial_{d'}(\partial_{c'}\boldsymbol{e}_e)$ ： $\underline{\partial_{d'}\partial_{c'}X^e_{b'} = \partial_{c'}\partial_{d'}X^e_{b'}}$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \boxed{R^{a'}{}_{b'c'd'}}\ \boldsymbol{e}_{a'} &\equiv \partial_{c'}(\partial_{d'}\boldsymbol{e}_{b'}) - \partial_{d'}(\partial_{c'}\boldsymbol{e}_{b'}) = X^e_{b'}\cdot\underline{\underline{\{\partial_{c'}(\partial_{d'}\boldsymbol{e}_e) - \partial_{d'}(\partial_{c'}\boldsymbol{e}_e)\}}} \quad \text{：} \underline{\underline{\textbf{公式 3}}} \text{ を用いる。} \\
&= X^e_{b'}\cdot X^f_{c'}X^g_{d'}\{\partial_f(\partial_g\partial\boldsymbol{e}_e) - \partial_g(\partial_f\boldsymbol{e}_e)\} = X^e_{b'}X^f_{c'}X^g_{d'}R^h{}_{efg}\boldsymbol{e}_h = X^e_{b'}X^f_{c'}X^g_{d'}R^h{}_{efg}(X^{a'}_h\boldsymbol{e}_{a'}) \\
&= \boxed{X^e_{b'}X^f_{c'}X^g_{d'}X^{a'}_h R^h{}_{efg}}\ \boldsymbol{e}_{a'} \quad \text{：} \boxed{\textbf{(1,3) 型テンソルの成分の変換則}}
\end{aligned}
$$

定義 $R^a{}_{bcd} \equiv \partial_c\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} = -R^a{}_{bdc}$ を成分とする $(1,3)$ 型テンソルを**曲率テンソル**という。

定義 $R_{bd} \equiv R^a{}_{bad} = \partial_a\Gamma^a_{bd} - \partial_d\Gamma^a_{ba} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ea} - \Gamma^e_{ba}\Gamma^a_{ed}$ を成分とする $(0,2)$ 型テンソルを**リッチ・テンソル**という。

※ 曲率テンソルとリッチ・テンソルの定義では接続係数のみが用いられ，計量を必要としない。また，この段階では対称な接続である必要もない。

(b)　対称な接続とビアンキ恒等式　　※ 以下では，対称な接続（ $\Gamma^c_{ab}=\Gamma^c_{ba}$ ）の場合のみを考える。

公式 1　$\Gamma^c_{ab}=\Gamma^c_{ba}$ のとき，**第 1 ビアンキ恒等式** ${R^a}_{bcd}+{R^a}_{cdb}+{R^a}_{dbc}=0$ が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
{R^a}_{bcd}+{R^a}_{cdb}+{R^a}_{dbc} &= \underline{\partial_c\Gamma^a_{bd}}-\underline{\underline{\partial_d\Gamma^a_{bc}}}+\underline{\Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec}}-\underline{\underline{\Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}}}\\
&\quad+\underline{\underline{\partial_d\Gamma^a_{cb}}}-\underline{\underline{\underline{\partial_b\Gamma^a_{cd}}}}+\underline{\underline{\Gamma^e_{cb}\Gamma^a_{ed}}}-\underline{\underline{\underline{\Gamma^e_{cd}\Gamma^a_{eb}}}}\\
&\quad+\underline{\underline{\underline{\partial_b\Gamma^a_{dc}}}}-\underline{\partial_c\Gamma^a_{db}}+\underline{\underline{\underline{\Gamma^e_{dc}\Gamma^a_{eb}}}}-\underline{\Gamma^e_{db}\Gamma^a_{ec}}=0
\end{aligned}
$$

公式 2　$\Gamma^c_{ab}=\Gamma^c_{ba}$ のとき，**第 2 ビアンキ恒等式** $\nabla_e{R^a}_{bcd}+\nabla_c{R^a}_{bde}+\nabla_d{R^a}_{bec}=0$ が成り立つ。ここで $\nabla_e{R^a}_{bcd}$ は ${R^a}_{bcd}$ の**共変微分**である。

（公式 2 の導出）

対称な接続の局所平坦性定理より，任意の着目点 p について，$\Gamma^c_{ab}(p)=0$ となる座標系 (x) が必ず存在する。このとき，この座標系 (x) において以下の関係式が成り立つ。

・ $({R^a}_{bcd})_p=(\partial_c\Gamma^a_{bd}-\partial_d\Gamma^a_{bc}+\Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec}-\Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed})_p=(\partial_c\Gamma^a_{bd})_p-(\partial_d\Gamma^a_{bc})_p$

・
$$
\begin{aligned}
(\nabla_e{R^a}_{bcd})_p &= (\partial_e{R^a}_{bcd}+\Gamma^a_{fe}{R^f}_{bcd}-\Gamma^f_{be}{R^a}_{fcd}-\Gamma^f_{ce}{R^a}_{bfd}-\Gamma^f_{de}{R^a}_{bcf})_p\\
&=(\partial_e{R^a}_{bcd})_p=\Big(\partial_e(\partial_c\Gamma^a_{bd}-\partial_d\Gamma^a_{bc}+\Gamma^f_{bd}\Gamma^a_{fc}-\Gamma^f_{bc}\Gamma^a_{fd})\Big)_p\\
&=\Big(\partial_e\partial_c\Gamma^a_{bd}-\partial_e\partial_d\Gamma^a_{bc}+(\partial_e\Gamma^f_{bd})\Gamma^a_{fc}+\Gamma^f_{bd}(\partial_e\Gamma^a_{fc})-(\partial_e\Gamma^f_{bc})\Gamma^a_{fd}-\Gamma^f_{bc}(\partial_e\Gamma^a_{fd})\Big)_p\\
&=(\partial_e\partial_c\Gamma^a_{bd})_p-(\partial_e\partial_d\Gamma^a_{bc})_p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ &(\nabla_e{R^a}_{bcd}+\nabla_c{R^a}_{bde}+\nabla_d{R^a}_{bec})_p\\
&=\boxed{(\partial_e\partial_c\Gamma^a_{bd})_p}-\underline{(\partial_e\partial_d\Gamma^a_{bc})_p}\ +\ \underline{\underline{(\partial_c\partial_d\Gamma^a_{be})_p}}-\boxed{(\partial_c\partial_e\Gamma^a_{bd})_p}\ +\ \underline{(\partial_d\partial_e\Gamma^a_{bc})_p}-\underline{\underline{(\partial_d\partial_c\Gamma^a_{be})_p}}=0
\end{aligned}
$$

ここで $\nabla_e{R^a}_{bcd}+\nabla_c{R^a}_{bde}+\nabla_d{R^a}_{bec}$ はテンソル（添字表記）なので，ある座標系 (x) で 0 ならば任意の座標系で 0 になる。また，点 p は任意なので，すべての点で $\nabla_e{R^a}_{bcd}+\nabla_c{R^a}_{bde}+\nabla_d{R^a}_{bec}=0$ が成り立つ。

(c)　リーマン曲率

定義　**リーマン接続** $\Gamma^c_{ab}=\dfrac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab})$ を用いるときの曲率テンソルを**リーマン曲率**という。

公式　${R^a}_{bcd}$ がリーマン曲率のとき，**リッチ・テンソル** $R_{bd}\equiv{R^a}_{bad}$ について，$R_{bd}=R_{db}$ が成り立つ。

（公式の導出）　　※ $\Gamma_{cab}\equiv g_{cd}\Gamma^d_{ab}=\dfrac{1}{2}(\partial_a g_{bc}+\partial_b g_{ac}-\partial_c g_{ab})$

計量の局所平坦性定理より，任意の着目点 p について，$(\partial_c g_{ab})_p=(\partial_c g^{ab})_p=0$，かつ $\Gamma^c_{ab}(p)=0$ となる座標系が必ず存在する。このとき，この座標系 (x) において以下の関係式が成り立つ。　※ $R_{abcd}\equiv g_{ae}{R^e}_{bcd}$

・
$$
\begin{aligned}
(R_{abcd})_p &\equiv (g_{ae}{R^e}_{bcd})_p=g_{ae}(p)(\partial_c\Gamma^e_{bd}-\partial_d\Gamma^e_{bc}+\Gamma^f_{bd}\Gamma^e_{fc}-\Gamma^f_{bc}\Gamma^e_{fd})_p=g_{ae}(p)(\partial_c\Gamma^e_{bd}-\partial_d\Gamma^e_{bc})_p\\
&=(\partial_c(g_{ae}\Gamma^e_{bd})-(\partial_c g_{ae})\Gamma^e_{bd}-\partial_d(g_{ae}\Gamma^e_{bc})+(\partial_d g_{ae})\Gamma^e_{bc})_p=(\partial_c(g_{ae}\Gamma^e_{bd})-\partial_d(g_{ae}\Gamma^e_{bc}))_p\\
&=(\partial_c\Gamma_{abd}-\partial_d\Gamma_{abc})_p=\left(\frac{1}{2}\partial_c(\partial_b g_{da}+\partial_d\underline{g_{ba}}-\partial_a g_{bd})-\frac{1}{2}\partial_d(\partial_b g_{ca}+\partial_c\underline{g_{ba}}-\partial_a g_{bc})\right)_p\\
&=\frac{1}{2}\left(\partial_c\partial_b g_{da}-\partial_c\partial_a g_{bd}-\partial_d\partial_b g_{ca}+\partial_d\partial_a g_{bc}\right)_p \qquad ※\ \partial_c\partial_b=\partial_b\partial_c\ \text{etc.},\ \ g_{da}=g_{ad}\ \ \text{etc. である。}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \ (R_{abcd})_p=-(R_{abdc})_p=-(R_{bacd})_p=(R_{badc})_p=(R_{cdab})_p=-(R_{cdba})_p=-(R_{dcab})_p=(R_{dcba})_p$

※ R_{abcd} はテンソルなので，上記の**対称性・反対称性**は任意の座標系における任意の点で成り立つ。

※ $g^{ae}R_{ebcd}=g^{ae}(g_{ef}{R^f}_{bcd})=(g^{ae}g_{ef}){R^f}_{bcd}=\delta^a_f{R^f}_{bcd}={R^a}_{bcd}$

$\therefore\ \ R_{bd}={R^a}_{bad}=g^{ac}R_{abcd}=g^{ac}R_{cdab}={R^a}_{dab}=R_{db}$ **（公式）**

定義　$R\equiv g^{ab}R_{ab}$ を**スカラー曲率**，あるいは**リッチ・スカラー**という。

定義　$G_{ab}\equiv R_{ab}-\dfrac{1}{2}Rg_{ab}$ を**アインシュタイン・テンソル**という。