〔テンソルとその微分〕　※『一般相対論B』に現れる数式の公式集

1.　n 次元一般座標

(a)　n 次元一般座標の表記法

(i)　$(x^1,\cdots,x^n)$，$(x^{1'},\cdots,x^{n'})$ などをそれぞれ (x)，(x') のように表記する。

(ii)　簡単化のため，$(x^1,\cdots,x^n)$ を変数とする関数を $f(x)$，あるいは単に f のように表記する。

(b)　座標変換　※ a, b などの添字は 1 から n までの整数値をとる。

(i)　$x^a(x')$，$x^{a'}(x)$ などの座標変換関数は C^∞ 級（無限階連続微分可能）であるものとする。

(ii)　座標変換関数の全微分

$$\begin{cases} dx^a = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^a(x')}{\partial x^{b'}} dx^{b'} = \sum_{b=1}^{n} X^a_{b'} dx^{b'} & : \ X^a_{b'} \equiv \dfrac{\partial x^a(x')}{\partial x^{b'}}, \ \det\left(X^a_{b'}\right) \neq 0 \\ dx^{a'} = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} \frac{\partial x^{a'}(x)}{\partial x^{b}} dx^{b} = \sum_{b=1}^{n} X^{a'}_{b} dx^{b} & : \ X^{a'}_{b} \equiv \dfrac{\partial x^{a'}(x)}{\partial x^{b}}, \ \det\left(X^{a'}_{b}\right) \neq 0 \end{cases}$$

(iii)　$\left(X^a_{b'}\right)$ と $\left(X^{a'}_{b}\right)$ の逆行列関係

$$\sum_{c=1}^{n} X^a_{c'} X^{c'}_{b} = \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial x^a(x')}{\partial x^{c'}} \frac{\partial x^{c'}(x)}{\partial x^b} = \frac{\partial x^a}{\partial x^b} = \delta^a_b \equiv \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a\neq b) \end{cases} \quad \text{同様に} \quad \sum_{c=1}^{n} X^{a'}_{c} X^{c}_{b'} = \delta^{a'}_{b'} \equiv \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a\neq b) \end{cases}$$

2.　ベクトルとテンソル　※ 以下では $\displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^{a'}_{b} dx^b \to X^{a'}_{b} dx^b$ のように，アインシュタインの表記法を用いる。

(a)　接ベクトル $\vec{v}$ ： $\vec{\mathrm{e}}_a \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^a}$ を座標基底とする線形空間の元　※ 座標系 (x') では，$\vec{\mathrm{e}}_{a'} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^{a'}}$

$$\vec{v} = v^a \vec{\mathrm{e}}_a = v^{a'} \vec{\mathrm{e}}_{a'} \quad ※\ \text{変換則} \begin{cases} \vec{\mathrm{e}}_{a'} = X^b_{a'} \vec{\mathrm{e}}_b, \ \vec{\mathrm{e}}_a = X^{b'}_a \vec{\mathrm{e}}_{b'} & :\text{座標基底} \\ v^{a'} = X^{a'}_b v^b, \ v^a = X^a_{b'} v^{b'} & :\text{座標成分} \end{cases}$$

(b)　1 形式 $\tilde{\omega}$ ： $\tilde{\mathrm{e}}^a \equiv dx^a$ を座標基底とする線形空間の元　※ 座標系 (x') では，$\tilde{\mathrm{e}}^{a'} \equiv dx^{a'}$

$$\tilde{\omega} = \omega_a \tilde{\mathrm{e}}^a = \omega_{a'} \tilde{\mathrm{e}}^{a'} \quad ※\ \text{変換則} \begin{cases} \tilde{\mathrm{e}}^{a'} = X^{a'}_b \tilde{\mathrm{e}}^b, \ \tilde{\mathrm{e}}^a = X^a_{b'} \tilde{\mathrm{e}}^{b'} & :\text{座標基底} \\ \omega_{a'} = X^b_{a'} \omega_b, \ \omega_a = X^{b'}_a \omega_{b'} & :\text{座標成分} \end{cases}$$

(c)　不変内積汎関数としての接ベクトルと 1 形式の双対性 (Duality)

(i)　内積の定義と表記法　$\vec{v}(\tilde{\omega}) \equiv \tilde{\omega}(\vec{v}) \equiv \omega_a v^a$　※ $\begin{cases} \text{接ベクトル } \vec{v} & : 1\text{ 形式を変数とする汎関数} \\ 1\text{ 形式 } \tilde{\omega} & : \text{接ベクトルを変数とする汎関数} \end{cases}$

(ii)　内積の座標独立性　$\omega_a v^a = \left(X^{b'}_a \omega_{b'}\right)\left(X^a_{c'} v^{c'}\right) = \left(X^{b'}_a X^a_{c'}\right) \omega_{b'} v^{c'} = \delta^{b'}_{c'} \omega_{b'} v^{c'} = \omega_{c'} v^{c'} = \omega_{a'} v^{a'}$

(d)　座標基底のテンソル積　$\mathbf{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r} \equiv \vec{\mathrm{e}}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \vec{\mathrm{e}}_{a_r} \otimes \tilde{\mathrm{e}}^{b_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathrm{e}}^{b_s}$
$\mathbf{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r}(\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r;\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s) \equiv \vec{\mathrm{e}}_{a_1}(\tilde{\omega}^1)\cdots\vec{\mathrm{e}}_{a_r}(\tilde{\omega}^r)\cdot\tilde{\mathrm{e}}^{b_1}(\vec{v}_1)\cdots\tilde{\mathrm{e}}^{b_s}(\vec{v}_s) \equiv (\tilde{\omega}^1)_{a_1}\cdots(\tilde{\omega}^r)_{a_r}\cdot(\vec{v}_1)^{b_1}\cdots(\vec{v}_s)^{b_s}$

(e)　(r,s) 型テンソル $\mathbf{A}$ ： $\mathbf{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r}$ を座標基底とする線形空間の元　※ スカラー関数は $(0,0)$ 型テンソル

$$\mathbf{A} = A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} \mathbf{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r} \quad ※\ \mathbf{A}(\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r;\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s) \equiv A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}(\tilde{\omega}^1)_{a_1}\cdots(\tilde{\omega}^r)_{a_r}\cdot(\vec{v}_1)^{b_1}\cdots(\vec{v}_s)^{b_s}$$

(f)　抽象添字記法 ： 基底を省略し，例えば接ベクトル v^a，1 形式 ω_a，$(1,2)$ 型テンソル S^a_{bc} のように表記する。

(g)　縮約 ： (r,s) 型テンソル $\to$ $(r-1,s-1)$ 型テンソル （例）$S^a_{bc} \to S^a_{ac} \equiv \displaystyle\sum_{a=1}^{n} S^a_{ac}$，$T^a_b v^c \to T^a_b v^b \equiv \displaystyle\sum_{b=1}^{n} T^a_b v^b$ など

3.　接続 (微分) と平行移動

(a)　接続演算子 (微分演算子) ∂_a に対する要請

(i)　写像 $\partial_a : (r,s)$ 型テンソル $\mathbf{A} \to (r,s)$ 型テンソル $\partial_a \mathbf{A}$　※ スカラー関数 f に対しては，$\partial_a f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x^a}$ とする。

(ii)　線形則 : $\partial_a(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \partial_a\mathbf{A} + \partial_a\mathbf{B}$

(iii)　ライプニッツ則 : $\partial_a(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) = (\partial_a\mathbf{P})\otimes\mathbf{Q} + \mathbf{P}\otimes(\partial_a\mathbf{Q})$

(iv)　縮約と可換

(b) 接続係数 Γ^c_{ab} : $\Gamma^c_{ab} \equiv (\partial_b \vec{\mathrm{e}}_a)^c \longleftrightarrow \Gamma^c_{ab}\ \vec{\mathrm{e}}_c \equiv \partial_b \vec{\mathrm{e}}_a \Longleftrightarrow \Gamma^a_{cb} \equiv -(\partial_b \tilde{\mathrm{e}}^a)_c \longleftrightarrow \Gamma^a_{cb}\tilde{\mathrm{e}}^c \equiv -\partial_b \tilde{\mathrm{e}}^a$

(i) 接ベクトルの微分公式 : $\partial_b \vec{v} = \partial_b(v^a \vec{\mathrm{e}}_a) = (\partial_b v^a + \Gamma^a_{cb} v^c)\,\vec{\mathrm{e}}_a = (\nabla_b v^a)\,\vec{\mathrm{e}}_a,\ \nabla_b v^a \equiv (\partial_b \vec{v})^a = \partial_b v^a + \Gamma^a_{cb} v^c$

(ii) 1形式の微分公式 : $\partial_b \tilde{\omega} = \partial_b(\omega_a \tilde{\mathrm{e}}^a) = (\partial_b \omega_a - \Gamma^c_{ab}\omega_c)\,\tilde{\mathrm{e}}^a = (\nabla_b \omega_a)\,\tilde{\mathrm{e}}^a,\ \nabla_b \omega_a \equiv (\partial_b \tilde{\omega})_a = \partial_b \omega_a - \Gamma^c_{ab}\omega_c$

(iii) (r,s) 型テンソルの微分公式 : $\nabla_c A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} \equiv (\partial_c \mathbf{A})^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} = \partial_c A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} + \sum_{k=1}^{r} \Gamma^{a_k}_{d_k c} A^{a_1\cdot\cdot d_k\cdot\cdot a_r}_{b_1\cdots b_s} - \sum_{k=1}^{s} \Gamma^{d_k}_{b_k c} A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdot\cdot d_k\cdot\cdot b_s}$

(iv) 抽象添字記法では $\nabla_{b_1} A^{a_1\cdots a_r}_{b_2\cdots b_{s+1}}$ を $(r, s+1)$ 型テンソルとみなす。 ※ $a_1,\cdots,a_r,b_1,b_2,\cdots,b_{s+1}$ が成分添字

(v) $(1,1)$ 型の定テンソル δ^a_b : $\nabla_c \delta^a_b = \partial_c \delta^a_b + \Gamma^a_{dc}\delta^d_b - \Gamma^d_{bc}\delta^a_d = 0 + \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{bc} = 0$ ※ 要請 3.-(a) の帰結

(c) 接続係数の変換則 : $\Gamma^{c'}_{a'b'}\vec{\mathrm{e}}_{c'} \equiv \partial_{b'}\vec{\mathrm{e}}_{a'} = \partial_{b'}\left(X^e_{a'}\vec{\mathrm{e}}_e\right) = \left\{X^{c'}_d X^e_{a'} X^f_{b'} \Gamma^d_{ef} + X^{c'}_d \dfrac{\partial^2 x^d}{\partial x^{a'} \partial x^{b'}}\right\}\vec{\mathrm{e}}_{c'}$ ※ $\partial_{b'} = X^f_{b'}\partial_f$

(d) ねじれ (Torsion) テンソル : $T^c_{ab} \equiv \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba} \to T^{c'}_{a'b'} = X^{c'}_d X^e_{a'} X^f_{b'} T^d_{ef}$ ※ $(1,2)$ 型テンソルとして変換する。

(e) 平行移動 : 曲線 C の接ベクトルを $\vec{u}$ として，$u^a \partial_a \mathbf{A} = 0$ のとき，『$\mathbf{A}$ は C に沿って平行移動する。』という。

(f) 同一点にある 2 つの微小変位とそれらの平行移動が平行四辺形を作れる条件は，$T^c_{ab} = 0$, すなわち$\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$

(g) 対称な接続 $(\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb})$ の局所平坦性 : 任意の着目点 p で，接続係数が 0 となる座標系 (x') が存在する。

$$x^a - x^a(p) = x^{a'} - x^{a'}(p) - \frac{1}{2}\Gamma^a_{bc}(p)\left(x^{b'} - x^{b'}(p)\right)\left(x^{c'} - x^{c'}(p)\right) \ \to\ \Gamma^{a'}_{b'c'}(p) = 0$$

4. 曲率テンソル ※ 抽象添字記法において，$\nabla_a f \equiv (df)_a \equiv \partial_a f$ は 1 形式

(a) 定義 : $R^a{}_{bcd}\vec{\mathrm{e}}_a \equiv \partial_c \partial_d \vec{\mathrm{e}}_b - \partial_d \partial_c \vec{\mathrm{e}}_b = \left(\partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}\right)\vec{\mathrm{e}}_a$ ※ $R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc}$ (恒等式)

(b) 微分についての交換関係の例と一般公式

$$(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) f = (\Gamma^b_{cd} - \Gamma^b_{dc})\partial_b f = T^b_{cd}\partial_b f,\quad (\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) v^a = R^a{}_{bcd} v^b$$

$$(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c)\omega_b = -R^a{}_{bcd}\omega_a,\quad (\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c)\sigma^a_b = R^a{}_{ecd}\sigma^e_b - R^e{}_{bcd}\sigma^a_e$$

$$(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} = \sum_{k=1}^{r} R^{a_k}{}_{e_k cd} A^{a_1\cdots e_k \cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} - \sum_{k=1}^{s} R^{e_k}{}_{b_k cd} A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots e_k\cdots b_s}$$

(c) 対称な接続に対するビアンキ (Bianchi) 恒等式 ※ $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$ のとき

(i) $R^d{}_{abc} + R^d{}_{bca} + R^d{}_{cab} = 0$ (第 1 恒等式) **(ii)** $\nabla_a R^e{}_{dbc} + \nabla_b R^e{}_{dca} + \nabla_c R^e{}_{dab} = 0$ (第 2 恒等式)

(d) リッチ (Ricci) テンソル : $R_{bd} \equiv R^a{}_{bad}$ ※ 下記のリーマンテンソルでは $R_{bd} = R_{db}$ が成り立つ。

5. 計量接続とリーマン (Riemann) テンソル ※ 計量テンソル : $g_{ab} = g_{ba},\ g^{ab} = g^{ba},\ g^{ac}g_{cb} = \delta^a_b$

(a) 計量接続に対する要請 : **(i)** 計量は定テンソル $\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^d_{ac} g_{db} - \Gamma^d_{bc} g_{ad} = 0$ **(ii)** 対称な接続 $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$

条件 (ii) のもとで条件 (i) を Γ^a_{bc} について解く。: $\Gamma^a_{bc} = \dfrac{1}{2} g^{ad}\Big(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}\Big)$ ※ $\partial_a g_{bc} = 0 \Longleftrightarrow \Gamma^a_{bc} = 0$

(b) リーマンテンソル（計量接続における曲率テンソル） ※ $R_{abcd} \equiv g_{ae} R^e{}_{bcd}$

(i) 対称性 : $R_{abcd} = -R_{abdc} = -R_{bacd},\ R_{dabc} + R_{dbca} + R_{dcab} = 0$ (第 1 恒等式) $\to$ $R_{abcd} = R_{cdab}$

(ii) リッチテンソルとリッチスカラー : $R^c{}_{acb} = R_{ab} = R_{ba},\ R \equiv R^a{}_a \equiv R_a{}^a \equiv g^{ab} R_{ab}$

(iii) R_{abcd} の独立成分の数は $N_n = \dfrac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$: $(n, N_n) = (2,1),\ (3,6),\ (4,20),\ (5,50),\cdots$

(iv) 特殊な次元 : $n = 2$ のとき $R = 0 \Longleftrightarrow R_{abcd} = 0$, $n = 3$ のとき $R_{ab} = 0 \Longleftrightarrow R_{abcd} = 0$

(c) 平坦性定理 : すべての点で $R_{abcd} = 0 \Longleftrightarrow$ すべての点で $\partial_c g_{ab} = 0$ ($R_{abcd} = 0$ は平坦性の必要十分条件)

(d) アインシュタインテンソル : $G_{ab} \equiv R_{ab} - \dfrac{R}{2} g_{ab}$ ※ 2 次元多様体 $(n = 2)$ では，$G_{ab} = 0$ が恒等的に成り立つ。

(e) 縮約されたビアンキ恒等式 : $\nabla_b G^{ab} = 0$ ※ $G^{ab} \equiv g^{ac} g^{bd} G_{cd}$

(f) アインシュタイン方程式 $(n = 4)$: $G_{ab} \equiv R_{ab} - \dfrac{R}{2} g_{ab} = \dfrac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$ ※ T_{ab} は物質場を表すテンソル