〔シュバルツシルト時空上の測地線〕

1. 測地線方程式

(a) 計量 ds^2（シュバルツシルト座標）　※ $r_g \equiv \dfrac{2GM}{c^2}$ はシュバルツシルト半径（重力半径）

$$ds^2 \equiv \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x)dx^a dx^b = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$$

(b) 測地線方程式のラグランジュ関数 L

$$\begin{cases} \cdot\ \dot{x}^a \equiv \dfrac{dx^a(\lambda)}{d\lambda} \quad \text{※ } \lambda \text{は測地線のアフィン・パラメータ（}L\text{が一定値となるような目盛り付け）} \\ \cdot\ 2L \equiv \displaystyle\sum_{b,c=0}^{3} g_{bc}(x)\dot{x}^b\dot{x}^c = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2\dot{t}^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 \\ \cdot\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x^a} \quad \text{（※ } x^a = t,\, r,\, \theta,\, \phi\text{）：測地線方程式（オイラー＝ラグランジュ方程式）} \end{cases}$$

(c) 定理：微分可能な計量関数 $g_{ab}(x)$ をどのように与えても，測地線上では必ず，$\dfrac{dL}{d\lambda}=0$ が満たされる。

（証明）L は λ を陽に含まないので，以下の等式が成り立つ。

$$\cdot\ \frac{dL}{d\lambda} = \sum_{a=0}^{3}\left\{\frac{dx^a}{d\lambda}\underline{\frac{\partial L}{\partial x^a}} + \frac{d\dot{x}^a}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right\} = \sum_{a=0}^{3}\left\{\dot{x}^a\underline{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right)} + \frac{d\dot{x}^a}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right\} \quad \text{：}\underline{\text{測地線方程式}}$$

$$= \sum_{a=0}^{3}\frac{d}{d\lambda}\left(\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) \quad \therefore\ \frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{a=0}^{3}\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} - L\right) = 0 \ \rightarrow\ \sum_{a=0}^{3}\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} - L = E \ \text{（積分定数）}$$

$$\cdot\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = \frac{1}{2}\sum_{b,c=0}^{3} g_{bc}(x)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^a}\left(\dot{x}^b\dot{x}^c\right) = \frac{1}{2}\sum_{b,c=0}^{3} g_{bc}(x)\left(\delta^b_a\dot{x}^c + \dot{x}^b\delta^c_a\right) \quad \text{※ } g_{ba}(x) = g_{ab}(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{c=0}^{3} g_{ac}(x)\dot{x}^c + \sum_{b=0}^{3} g_{ba}(x)\dot{x}^b\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{b=0}^{3} g_{ab}(x)\dot{x}^b + \sum_{b=0}^{3} g_{ab}(x)\dot{x}^b\right) = \sum_{b=0}^{3} g_{ab}(x)\dot{x}^b$$

$$\cdot\ E = \sum_{a=0}^{3}\dot{x}^a\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} - L = \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x)\dot{x}^a\dot{x}^b - L = 2L - L = L \quad \text{※ 任意の次元と計量符号で成立。}$$

$$\therefore\ \frac{dL}{d\lambda} = \frac{dE}{d\lambda} = 0 \quad \text{※ 解析力学のエネルギー保存則（『ネーターの定理』の一種）に相当。}$$

(d) シュバルツシルト時空の循環座標 (t, ϕ) と保存量 (k, h)

$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \ \rightarrow\ \left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)c^2\dot{t} = kc^2 \ \text{（積分定数）} \\ \cdot\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \ \rightarrow\ r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = h \ \text{（積分定数）} \end{cases}$$

(e) θ 方向の運動と保存量 ℓ^2

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \ \rightarrow\ \frac{d}{d\lambda}\left(r^2\dot{\theta}\right) = r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 \text{：両辺に } (2r^2\dot{\theta}) \text{ を掛けて整理する。}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\left(r^2\dot{\theta}\right)^2\right\} = 2\left(r^2\dot{\theta}\right)\frac{d}{d\lambda}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 2r^2\dot{\theta}\cdot r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2 = \frac{2h^2\dot{\theta}\cos\theta}{\sin^3\theta} = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{h^2}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\therefore\ \frac{d}{d\lambda}\left(r^4\dot{\theta}^2 + r^4\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{d}{d\lambda}\left\{\left(r^2\dot{\theta}\right)^2 + \frac{h^2}{\sin^2\theta}\right\} = 0 \ \rightarrow\ r^4\dot{\theta}^2 + \frac{h^2}{\sin^2\theta} = \ell^2 \ \text{（積分定数）}$$

※ ニュートン力学では，ℓ は単位質量あたりの角運動量，h はその z 成分にそれぞれ対応する。

2. 軌道方程式

(a) 有効ポテンシャル

パラメータ (k,ℓ,h) を用いて関係式 $L=E$ に含まれる $(\dot{t},\dot{\theta},\dot{\phi})$ を消去し，整理する。

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2+V_g(r)=E_g \quad ※\ V_g(r)\equiv-\epsilon_g\frac{GM}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{GM\ell^2}{r^3c^2},\quad \epsilon_g\equiv-\frac{2E}{c^2},\quad E_g\equiv E+\frac{1}{2}k^2c^2$$

$\therefore$ r 方向の運動は，有効ポテンシャル $V_g(r)$ の中での 1 次元運動と見なせる。

(b) 軌道面：ϕ の関数としての θ　　※ 以下では $h\equiv r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\neq 0$ の場合を考える。

パラメータ $h=r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$ が保存量なので，$\dot{\phi}$ の正負は変化しない。したがって $h\neq 0$ のとき，一般性を失わずに $\dot{\phi}>0$ としてよい。このとき，ϕ はパラメータ λ の単調増加関数になるので，微分のチェーンルールを用いて，以下のように θ を ϕ の関数と見なす。

$$\frac{\ell^2}{h^2}=\frac{1}{h^2}\left(r^4\dot{\theta}^2+\frac{h^2}{\sin^2\theta}\right)=\left(\frac{r^2\dot{\theta}}{h}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}=\left(\frac{r^2\dot{\theta}}{r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\frac{d\theta}{d\lambda}}{\frac{d\phi}{d\lambda}}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}=\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\ :\ \frac{1}{\sin^2\theta}=\cot^2\theta+1,\ \frac{d}{d\theta}\cot\theta=-\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=\left(-\frac{d}{d\phi}\cot\theta\right)^2+\cot^2\theta+1 \qquad \therefore\ \xi\equiv\cot\theta\text{として，}\ \left(\frac{d\xi}{d\phi}\right)^2+\xi^2=\frac{\ell^2}{h^2}-1 \quad (\dagger)$$

※ 方程式 $(\dagger)$ は振幅 $\sqrt{\frac{\ell^2}{h^2}-1}$ の正弦関数が満たす式なので，$\xi=\cot\theta=\sqrt{\frac{\ell^2}{h^2}-1}\ \sin\phi\ (*)$ となる。ここで ϕ の基準点（$\phi=0$）を，軌道（測地線）が赤道面（$\theta=\pi/2$）を横切る位置に選んだ。

※ $\begin{cases}\dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\equiv\cot\theta\\ \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\equiv\sin\phi\end{cases}$ とすると，$(*)$ は仮想的な (X,Y,Z) 空間内の平面　$Z=\sqrt{\frac{\ell^2}{h^2}-1}\,Y\ ;\ \forall X$

※ 上記の平面は $(X,Y,Z)=(0,0,0)$ を含むので，軌道傾斜角に応じて角度 θ を測る基準軸（Z 軸）を選び直すことにより，一般性を失うことなく赤道面（$\theta=\pi/2$）を軌道面と考えてよい。

(c) 赤道面上の軌道方程式： 赤道面上の軌道（$\theta=\pi/2,\ \dot{\theta}=0$）では，$\ell=h=r^2\dot{\phi}$ となる。

$$※\ \frac{\dot{r}^2}{h^2}=\left(\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\phi}}\right)^2=\left(\frac{1}{r^2}\frac{\frac{dr}{d\lambda}}{\frac{d\phi}{d\lambda}}\right)^2=\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2=\left(-\frac{d}{d\phi}\frac{1}{r}\right)^2 \qquad \therefore\ \dot{r}^2=\left(\frac{d}{d\phi}\frac{h}{r}\right)^2$$

※ a_N を適当な正定数として $u\equiv\frac{a_N}{r}$ とすると，**2-(a)** は次のようになる。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+U_g(u)=\mathcal{E}_g,\quad U_g(u)\equiv\frac{{a_N}^2}{h^2}V_g(r),\quad \mathcal{E}_g\equiv\frac{{a_N}^2}{h^2}E_g$$

※ 時間的測地線の場合は $a_N=\frac{h^2}{GM}$ とすると，軌道方程式が見通しのよい形になる。

$$\begin{cases}\cdot\ u=\left(\dfrac{h^2}{GM}\right)\dfrac{1}{r},\quad U_g(u)=\left(\dfrac{h}{GM}\right)^2V_g(r)=-\epsilon_g u+\dfrac{1}{2}u^2-\left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2u^3,\quad \mathcal{E}_g=\left(\dfrac{h}{GM}\right)^2E_g\\ \cdot\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{d\phi}\right)^2+U_g(u)=\mathcal{E}_g\ \text{を}\phi\text{で微分}\ :\ \dfrac{d^2u}{d\phi^2}-\epsilon_g+u-3\left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2u^2=0\end{cases}$$