〔多様体上のベクトル：接ベクトルと１形式〕

(1) 座標変換とヤコビ行列

(a) C^∞ 級 n 次元多様体 M 上の任意の点 p とその**開近傍** $\mathcal{O}_p$（点 p を内部に含む開領域）を覆う座標系を２つ，任意に選び，それぞれ $(x)\equiv(x^1,\cdots,x^n)$，$(x')\equiv(x^{1'},\cdots,x^{n'})$ とする。

(b) (x) と (x') のあいだの座標変換に対し，次の**ヤコビ行列** $X=\left[X^{a'}_{b}\right]$ と $X^{-1}=\left[X^{a}_{b'}\right]$ を定義する。

$$\begin{cases} X^{a'}_{b}\equiv\dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^{b}} & ：\text{行列 } X \text{ の } a \text{ 行 } b \text{ 列成分} \quad (\det X\neq 0 \text{ とする。}) \\[2ex] X^{a}_{b'}\equiv\dfrac{\partial x^{a}}{\partial x^{b'}} & ：\text{行列 } X^{-1} \text{ の } a \text{ 行 } b \text{ 列成分} \quad (\det X^{-1}\neq 0 \text{ とする。}) \end{cases}$$

↓　逆行列関係 $XX^{-1}=X^{-1}X=I_n$ の確認（I_nは n 次単位行列）

$$\begin{cases} \left(XX^{-1}\right)^{a'}_{b'}=\displaystyle\sum_{c=1}^{n}X^{a'}_{c}X^{c}_{b'}=\sum_{c=1}^{n}\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{c}}\frac{\partial x^{c}}{\partial x^{b'}}=\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{b'}}=\delta^{a'}_{b'}=(I_n)^{a'}_{b'} \\[2ex] \left(X^{-1}X\right)^{a}_{b}=\displaystyle\sum_{c=1}^{n}X^{a}_{c'}X^{c'}_{b}=\sum_{c=1}^{n}\frac{\partial x^{a}}{\partial x^{c'}}\frac{\partial x^{c'}}{\partial x^{b}}=\frac{\partial x^{a}}{\partial x^{b}}=\delta^{a}_{b}=(I_n)^{a}_{b} \end{cases}$$

※ $\delta^{a}_{b}=\delta^{a'}_{b'}=\begin{cases}1 & (a=b)\\ 0 & (a\neq b)\end{cases}$

(c) 座標変換にともなうヤコビ行列の行列式を**ヤコビの関数行列式（ヤコビアン）**という。

座標変換 $(a=1\sim n)$ ： $x^{a'}=x^{a'}(x)$ $\rightarrow$ 座標値の微小変化 ： $\delta x^{a'}=\displaystyle\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{b}}\,\delta x^{b}=\sum_{b=1}^{n}X^{a'}_{b}\,\delta x^{b}$

行列表記では， $\delta\boldsymbol{x}'\equiv\begin{pmatrix}\delta x^{1'}\\ \vdots\\ \delta x^{n'}\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}X^{1'}_{1} & \cdots & X^{1'}_{n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ X^{n'}_{1} & \cdots & X^{n'}_{n}\end{pmatrix}}\ \underline{\underline{\begin{pmatrix}\delta x^{1}\\ \vdots\\ \delta x^{n}\end{pmatrix}}}\equiv\underline{X}\ \underline{\underline{\delta\boldsymbol{x}}}$ となる。

領域 $\mathcal{O}_p$では座標値 (x) と (x') が滑らかな１対１対応をもつので，$\delta\boldsymbol{x}$ と$\delta\boldsymbol{x}'$も１対１対応をもつ。

$$\therefore \begin{cases} 1\text{ 次変換 } \delta\boldsymbol{x}\rightarrow\delta\boldsymbol{x}' \text{ の係数行列 } X \text{ が逆行列をもつ。} \iff \det X\neq 0 \quad (\text{同様に，}\det X^{-1}\neq 0) \\ \text{滑らかな座標変換 } (x)\longleftrightarrow(x') \text{ が定義される。} \iff \det X\neq 0 \text{ かつ } \left|X^{a'}_{b}\right|<\infty \ \ (a,\ b=1\sim n) \end{cases}$$

(2) 曲線と接ベクトル

(a) t を実パラメータとして，多様体上の点を t で目盛りづけして（連続的に）つないだものを**曲線**といい，以下では記号 $C(t)$ で表す。　※ 曲線 $C(t)$ の**向き**を，$C(t)$ に沿って t が増加するように定める。

(b) 開近傍 $\mathcal{O}_p$ の座標系を用いると曲線 $C(t)$ は，パラメータ t を変数とする n 個の実関数の組で表される。

$\begin{cases} x^{a}=x^{a}(t) & ：\text{ in } (x)\\ x^{a'}=x^{a'}(t) & ：\text{ in } (x')\end{cases}$ $(a=1\sim n)$　※ **曲線 $C(t)$ の滑らかさ**を関数 $x^a(t)$ の滑らかさで定義する。

(c) **変換公式** ： $dx^{a'}=\displaystyle\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial x^{a'}(x)}{\partial x^{b}}dx^{b}=\sum_{b=1}^{n}X^{a'}_{b}dx^{b}$ と $dx^{a}=\displaystyle\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial x^{a}(x')}{\partial x^{b'}}dx^{b'}=\sum_{b=1}^{n}X^{a}_{b'}dx^{b'}$ を用いる。

$$\frac{dx^{a'}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\left[x^{a'}(x)\right]_{\text{on } C(t)}\right)=\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{b}}\frac{dx^{b}(t)}{dt}=\sum_{b=1}^{n}X^{a'}_{b}\frac{dx^{b}(t)}{dt},\quad \text{同様に}\quad \frac{dx^{a}(t)}{dt}=\sum_{b=1}^{n}X^{a}_{b'}\frac{dx^{b'}(t)}{dt}$$

※ M が C^∞級多様体 $\rightarrow$ $X^{a'}_{b}$ と $X^{a}_{b'}$が C^∞級関数 $\rightarrow$ $\dfrac{dx^{a}(t)}{dt}$の滑らかさと$\dfrac{dx^{a'}(t)}{dt}$の滑らかさが同じ。

∴ 任意の曲線 $C(t)$ について，**曲線の滑らかさは座標独立**である。

(d) 曲線 $C(t)$ の接ベクトル $\vec{v}$ を $C(t)$ の向きに沿う微分（演算子）として定義する。

$\underline{\underline{\textbf{定義}}}$ $\vec{v}\equiv\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)_{\text{on } C(t)}$ **（自明な座標独立性）**

$$=\sum_{a=1}^{n}\frac{dx^{a}(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^{a}}\right)\equiv\sum_{a=1}^{n}v^{a}\vec{e}_{a}\quad \text{in } (x)\quad ：\ v^{a}\equiv\frac{dx^{a}(t)}{dt}\ (\text{成分}),\quad \vec{e}_{a}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{a}}\ (\text{座標基底})$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\frac{dx^{a'}(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^{a'}}\right)\equiv\sum_{a=1}^{n}v^{a'}\vec{e}_{a'}\quad \text{in } (x')\quad ：\ v^{a'}\equiv\frac{dx^{a'}(t)}{dt}\ (\text{成分}),\quad \vec{e}_{a'}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{a'}}\ (\text{座標基底})$$

(3) 接空間（接ベクトルの集合）

定義　（任意の）点 $p \in M$ を通る（すべての）曲線の接ベクトルの集合 T_p を**点 p の接空間**という。

$$T_p = \left\{ \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p \;\middle|\; t \text{ は点 } p \in M \text{ を通る微分可能な曲線 } C(t) \text{ のパラメータ} \right\}$$

(a) 微分演算子としての接ベクトル

T_p の元 $\vec{v} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)_p$ は微分可能な任意関数 f に作用し，点 p $(t = t_p)$ における微分係数を生成する。

$$\vec{v}[f] \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_p = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a=1}^{n} \frac{dx^a(t_p)}{dt}\frac{\partial f(p)}{\partial x^a} \equiv \sum_{a=1}^{n} v^a \frac{\partial f(p)}{\partial x^a} & \text{in } (x) \\ \displaystyle\sum_{a=1}^{n} \frac{dx^{a'}(t_p)}{dt}\frac{\partial f(p)}{\partial x^{a'}} \equiv \sum_{a=1}^{n} v^{a'} \frac{\partial f(p)}{\partial x^{a'}} & \text{in } (x') \end{cases}$$

特に，T_p の元 $\vec{0}$ が $\vec{0}[f] = 0$ を満たすとき，$\vec{0}$ を T_p の**零ベクトル（零元）**という。

(b) ベクトルの同値関係と等式

微分可能な任意関数 f について，T_p の２つの元 $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が $\vec{u}[f] = \vec{v}[f]$ を満たすとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は**同値（等しい）**といい，等号記号を用いて $\vec{u} = \vec{v}$ と表す。

(c) 座標基底と座標成分 ： (2)-(d) と同様の計算から，次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} \vec{v} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p \quad \text{（自明な座標独立性）} \\ &= \sum_{a=1}^{n} \frac{dx^a(t_p)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \equiv \sum_{a=1}^{n} v^a\ (\vec{e}_a)_p \quad \text{in } (x) \quad : \quad v^a \equiv \frac{dx^a(t_p)}{dt}, \quad (\vec{e}_a)_p \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)_p \\ &= \sum_{a=1}^{n} \frac{dx^{a'}(t_p)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^{a'}}\right)_p \equiv \sum_{a=1}^{n} v^{a'}\ (\vec{e}_{a'})_p \quad \text{in } (x') \quad : \quad v^{a'} \equiv \frac{dx^{a'}(t_p)}{dt}, \quad (\vec{e}_{a'})_p \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^{a'}}\right)_p \end{aligned}$$

∴ 以下のように接空間 T_p は，$\begin{cases} (\vec{e}_a)_p & \text{in } (x) \\ (\vec{e}_{a'})_p & \text{in } (x') \end{cases}$ を**基本ベクトル（座標基底）**とする**線形空間**の性質をもつ。

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} u^a\ (\vec{e}_a)_p + \sum_{a=1}^{n} v^a\ (\vec{e}_a)_p \equiv \sum_{a=1}^{n} (u^a + v^a)\ (\vec{e}_a)_p & \text{（ベクトルの和が定義される。）} \\ \beta\vec{v} = \beta \displaystyle\sum_{a=1}^{n} v^a\ (\vec{e}_a)_p \equiv \sum_{a=1}^{n} (\beta v^a)\ (\vec{e}_a)_p & \text{（実数 } \beta \text{ との積が定義される。）} \end{cases}$$

※　**重要な注意点**：この段階では M 上の異なる２点 p と q について，T_p の元であるベクトル $(\vec{v})_p$ と T_q の元であるベクトル $(\vec{w})_q$ の和 $(\vec{v})_p + (\vec{w})_q$ を定義することができない。

※　表記の簡単化のために，以下では多様体上の点に依存することを明記するための添字 p を省略する。

(d) 座標変換にともなう基底と成分の変換公式：微分のチェーン・ルールから，次の変換公式が得られる。

基底の変換：$\vec{e}_{a'} = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^b_{a'}\vec{e}_b$，$\vec{e}_a = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^{b'}_a \vec{e}_{b'}$　　**成分の変換**：$v^{a'} = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^{a'}_b v^b$，$v^a = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^a_{b'} v^{b'}$

(4) １形式　　※ 接ベクトルの集合 T_p の場合と同様に，１形式の集合 $T_p{}^*$ は**自然な線形空間構造**をもつ。

定義　有限個の適当な関数の組 (f_1, h_1)，$\cdots$，(f_k, h_k) を用いて，次の $\tilde{\omega}$ のように表されるものを**１形式**という。

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &\equiv h_1 df_1 + \cdots + h_k df_k \quad (df_i \text{ は関数 } f_i \text{ の全微分}) \quad : \quad \text{自明な座標独立性} \\ &= \sum_{a=1}^{n} \underline{\left(h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x^a} + \cdots + h_k \frac{\partial f_k}{\partial x^a} \right)}\ \underline{\underline{dx^a}} \equiv \sum_{a=1}^{n} \underline{\omega_a}\ \underline{\underline{\tilde{e}^a}} \quad : \quad \omega_a \text{ は，座標基底 } \tilde{e}^a \equiv dx^a \text{ に関する } \tilde{\omega} \text{ の成分} \end{aligned}$$

座標変換にともなう基底と成分の変換公式：微分のチェーン・ルールから，次の変換公式が得られる。

基底の変換：$\tilde{e}^{a'} = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^{a'}_b \tilde{e}^b$，$\tilde{e}^a = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^a_{b'} \tilde{e}^{b'}$　　**成分の変換**：$\omega_{a'} = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^b_{a'}\omega_b$，$\omega_a = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} X^{b'}_a \omega_{b'}$