**補遺：集合と位相（位相空間）** ※ 物理学では『集合と位相』の概念とその専門用語を用いることがある。

**1. 集合（Set）** ※ 集合の素朴な（古典的な）定義

**(1)** 数学で扱う もの $x$ に対して『$x$ が $X$ に含まれる : $x \in X$』と『$x$ が $X$ に含まれない : $x \notin X$』のどちらか一方に定まるとき，もの の集まり $X$ を集合，$X$ に含まれる もの $x$ を $X$ の要素（Element），もしくは元という。

**(2)** 要素をもたない集合を空集合（Empty Set）といい，記号 $\emptyset$ で表すことが多い。

**(3)** 集合の等号関係：『$x \in X$ ならば $x \in X'$』と『$x \in X'$ ならば $x \in X$』が共に真であるとき，$X = X'$ と表す。

**(4)** 『$x \in S$ ならば $x \in X$』が真のとき，$S$ を $X$ の部分集合（Subset）といい，$S \subseteq X$ と表記する。特に，$S = X$ を除外するときは $S \subset X$ と表記し，真部分集合（Proper Subset）という。

**(5)** 任意の集合 $X$ に対して『$x \in \emptyset$ ならば $x \in X$』は真であるため，空集合 $\emptyset$ はすべての集合の部分集合となる。
※ 命題『$A$ ならば $B$ である』の真・偽の判定において，$A$ が偽のときは $B$ の真・偽に関わらず，この命題を常に真と判定する。また，空集合 $\emptyset$ に対しては $x \in \emptyset$ となる $x$ が存在しないため，『$x \in \emptyset$』は偽である。

**(6)** 空集合の一意性 : $\emptyset$ と $\emptyset'$ が共に空集合のとき，$\emptyset = \emptyset'$ である。
※ 上記の真偽判定規則より，『$x \in \emptyset$ ならば $x \in \emptyset'$』と『$x \in \emptyset'$ ならば $x \in \emptyset$』は共に真である。すなわち，$\emptyset$ と $\emptyset'$ は『同じ要素（実際には要素は何もない）』からなるため，$\emptyset = \emptyset'$ である。

**(7)** もの の集まりが集合にならない例：ラッセルのパラドックス（Russell's paradox）
もの として『それ自身を要素に含まない集合 $Y$（$Y \notin Y$）』を考え，そのような集合 $Y$ の集まりを $\mathcal{Y}$ とする。このとき，$\mathcal{Y}$ を集合と考えると次のような矛盾が生じる。したがって，$\mathcal{Y}$ は もの の集まりであるが集合ではない。
※ $\mathcal{Y}$ が集合 $\mathcal{Y}$ の要素と考えると，要素の要件 $\mathcal{Y} \notin \mathcal{Y}$ に反する。$\mathcal{Y}$ が集合 $\mathcal{Y}$ の要素でないと考えると，要件 $\mathcal{Y} \notin \mathcal{Y}$ を満たしてしまう。現代の集合論では，このような例を除外する公理系（ＺＦＣなど）を用いて集合を定義する。

**2. 位相空間（Topological Space）**

**(1)** 定義：次の条件を満たすように集合 $X$ の部分集合を（自分で）リストアップして集めたもの $\mathcal{T}$ を集合 $X$ の位相（Topology），$\mathcal{T}$ の要素としてリストアップされたそれぞれの部分集合を開集合（Open Set）という。
(a-1) 空集合 $\emptyset$ と集合 $X$ が共に，$\mathcal{T}$ の中にリストアップされている。
(a-2) $\mathcal{U}_1$ と $\mathcal{U}_2$ が共に $\mathcal{T}$ の中にリストアップされているならば，これらの共通部分である $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ も $\mathcal{T}$ の中にリストアップされている。
(a-3) $\mathcal{T}$ の中にリストアップされている開集合の（任意の）組 $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ から和集合 $\mathcal{O} = \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha$ をつくるとき，$\mathcal{O}$ も $\mathcal{T}$ の中にリストアップされている。 ※ 和集合 $\mathcal{O}$ を構成する開集合の数は無限個でもよい。

**(2)** 位相 $\mathcal{T}$ をもつ集合 $X$ を位相空間 $(X, \mathcal{T})$ という。 ※ $X$ がどのような集合でも，必ず次の位相を導入できる。
(b-1) 離散的位相（Discrete Topology）: $\mathcal{T} =$『集合 $X$ のすべての部分集合の集まり』 ※『$X$ のベキ集合』という。
(b-2) 密着的 (非離散的) 位相（Indiscrete Topology）: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ※『自明な位相』ということもある。

**(3)** 位相の役割１：リストアップした開集合を用いて，集合 $X$ の要素間に『距離のようなもの』を定義する。
※ 集合 $X = \{1,2,3,4\}$ に対して次の $\mathcal{T}_X$ を考えると，$\mathcal{T}_X$ は位相の要件 (a-1)∼(a-3) をすべて満たす。
$\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X, \{1,3\}, \{2,4\}\}$ : 位相 $\mathcal{T}_X$ の導入により，奇数と偶数は互いに遠い関係にあると見なしている。

**(4)** 位相の役割２：集合間の写像の『連続性 (広義の滑らかさ)』を定義する。
※ 集合 $Y = \{1,2\}$ に離散的位相 $\mathcal{T}_Y$，すなわち $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{2\}\}$ を導入する。いま，(3) の位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ への写像 $f$ を関数 $f(x)$ の形で，$f(1) = f(3) = 1$，$f(2) = f(4) = 2$ のように定義する。このとき写像 $f$ とその逆写像 $f^{-1}$ により，$\mathcal{T}_X$ の各要素と $\mathcal{T}_Y$ の各要素との間には次の１対１対応がある。

$$\mathcal{T}_X \ni \emptyset \longleftrightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_Y,\ \ \mathcal{T}_X \ni X \longleftrightarrow Y \in \mathcal{T}_Y,\ \ \mathcal{T}_X \ni \{1,3\} \longleftrightarrow \{1\} \in \mathcal{T}_Y,\ \ \mathcal{T}_X \ni \{2,4\} \longleftrightarrow \{2\} \in \mathcal{T}_Y$$

※ 写像 $f$ の連続性 : $Y$ の任意の開集合 $\mathcal{U}$ に対し，逆像 $f^{-1}(\mathcal{U}) \equiv \{x | x \in X$ かつ $f(x) \in \mathcal{U}\}$ が $X$ の開集合となる。

**(5)** 自習課題：次の文章中の 下線部 について調べよ。 ※ 一般相対論では一般座標変換を微分同相写像とみなす。
実数の集合 $\mathbb{R} = \{x | -\infty < x < \infty\}$ から開区間 $U = \{u | -1 < u < 1\}$ への 写像 を関数 $u = \tanh(x)$ で与える。このとき，実数空間の自然な距離による位相 のもとで，この写像とその 逆写像 は共に 連続 かつ 全単射 であり，さらに $C^\infty$ 級 であるから，$U$ と $\mathbb{R}$ は 微分同相 である。