〔一様等方空間の計量〕

1. 等方空間

定義 『３次元等方空間』とは，適当な座標系 (χ,θ,φ) において，計量が次の形になる空間である。

$$ds^2 = d\chi^2 + \sigma(\chi)^2\Big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\Big),\quad \sigma(\chi) > 0,\quad 0 < \theta < \pi,\quad 0 < \varphi < 2\pi$$

座標 χ は，動径方向の固有長を表す。等方空間の２次元部分として，動径座標 χ が一定値 χ_* となる領域を考えると，これは半径 χ_* の球面であり，その面積は $4\pi\Big\{\sigma(\chi_*)\Big\}^2$ である。

2. 一様等方空間

一般に，等方空間には χ 方向の一様性はなく，スカラー曲率 R も χ の関数になる。ここでは『空間の一様性』の定義には触れず，スカラー曲率 R が定数となるような等方空間を『一様等方空間』と呼ぶことにする。

定理 一様等方空間は，１つの実定数パラメータ K で特徴づけられる。このとき，関数 $\sigma(\chi)$ とリーマン曲率は，それぞれ次のようになる。

$$\sigma(\chi) = \frac{\sinh(\sqrt{-K}\ \chi)}{\sqrt{-K}} = \begin{cases} \dfrac{\sinh(\sqrt{|K|}\ \chi)}{\sqrt{|K|}} & (K<0) \\ \chi & (K=0) \\ \dfrac{\sin(\sqrt{K}\ \chi)}{\sqrt{K}} & (K>0) \end{cases},\qquad \begin{cases} R^{ij}{}_{mn} = K\Big(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m\Big) \\ R^j_n = R^{mj}{}_{mn} = 2K\delta^j_n,\qquad R = R^n_n = 6K \end{cases}$$

証明 各幾何学量の定義に従い順次，丁寧に計算する。以下では，$(x^1,x^2,x^3) \equiv (\chi,\theta,\varphi)$，$' \equiv \dfrac{d}{d\chi}$ とする。

(a) 計量関数 ： $g_{ij} = \mathrm{diag}\Big(1,\sigma^2,\sigma^2\sin^2\theta\Big)$，$g^{ij} = \mathrm{diag}\left(1,\dfrac{1}{\sigma^2},\dfrac{1}{\sigma^2\sin^2\theta}\right)$

(b) 計量接続 ： $\Gamma^i_{mn} = \Gamma^i_{nm} = \dfrac{1}{2}g^{ij}\left(\partial_m g_{jn} + \partial_n g_{mj} - \partial_j g_{mn}\right)$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{33} = \sin^2\theta\ \Gamma^1_{22} = -\sigma\sigma'\sin^2\theta,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \dfrac{\sigma'}{\sigma} \\ \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad\qquad (\text{他の成分は}\ 0) \end{cases}$$

(c) スカラー曲率 ： $R = g^{ij}R_{ij}$

$$R = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}\left(\partial_n\Gamma^n_{ij} - \partial_j\Gamma^n_{in} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^n_{kn} - \Gamma^k_{in}\Gamma^n_{kj}\right) = \frac{2}{\sigma^2} - 2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 - 4\frac{\sigma''}{\sigma}$$

(d) 境界条件 ： 原点（$\chi=0$）での正則性 $\begin{cases} \cdot\text{『}\chi=0\text{』の面積が}\ 0 \ \rightarrow\ \sigma(0)=0 \\ \cdot\ \chi=0\ \text{で}\ \sigma'\ \text{が有限} \end{cases}$

(e) 一様等方空間 ： K を実定数パラメータとして，$R=6K$ を要請する。

$$R = \frac{2}{\sigma^2} - 2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 - 4\frac{\sigma''}{\sigma} = 6K \ \rightarrow\ \Big(2\sigma\sigma'' + (\sigma')^2\Big)\sigma' = \Big(1-3K\sigma^2\Big)\sigma' \ :\ \begin{cases} \text{左辺} = \Big(\sigma(\sigma')^2\Big)' \\ \text{右辺} = \Big(\sigma - K\sigma^3\Big)' \end{cases}$$

$\rightarrow$ 積分定数を A として，$\sigma(\sigma')^2 = \sigma - K\sigma^3 + A$ ： **境界条件 (d)** より，$\underline{\underline{A=0}}$

※ $(\sigma'^2) = 1 - K\sigma^2 + \dfrac{A}{\sigma}$ となるため，$\underline{\underline{A=0}}$ でなければ $\sigma=0$（すなわち $\chi=0$）で σ' が発散する。

$\therefore\ \sigma' = \dfrac{d\sigma(\chi)}{d\chi} > 0$ として， $\dfrac{\sigma'}{\sqrt{1-K\sigma^2}} = 1$ を**境界条件 (d)** のもとで積分し，定理の結果を得る。

※ 関係式 $1 = \sigma' \cdot \left(1 - K\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ の積分

・ 次の公式を用いる。 $\dfrac{d}{d\psi}\sinh\psi = \cosh\psi = \sqrt{1+\sinh^2\psi}$

・ $\sigma(\chi) = \dfrac{\sinh\psi(\chi)}{\sqrt{-K}}$ と置換： $\sigma' = \dfrac{d\sigma(\chi)}{d\chi} = \dfrac{d\psi}{d\chi}\dfrac{d\sigma}{d\psi} = \dfrac{d\psi}{d\chi}\dfrac{d}{d\psi}\left(\dfrac{\sinh\psi}{\sqrt{-K}}\right) = \dfrac{d\psi}{d\chi}\left(\dfrac{\cosh\psi}{\sqrt{-K}}\right)$

・ 関係式に代入： $1 = \dfrac{d\psi}{d\chi}\left(\dfrac{\cosh\psi}{\sqrt{-K}}\right)\cdot\left(1+\sinh^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{d\psi}{d\chi}\left(\dfrac{\cosh\psi}{\sqrt{-K}}\right)\left(\cosh^2\psi\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{d\psi}{d\chi}\dfrac{1}{\sqrt{-K}}$

・ 境界条件：$\sigma(0) = \dfrac{\sinh\psi(0)}{\sqrt{-K}} = 0$ より，$\psi(0) = 0$ $\quad\therefore\ \psi = \sqrt{-K}\,\chi$

(f) 定曲率空間 ： 一様等方空間を特徴づける実定数パラメータ K を『曲率定数』という。

直接計算により, $R^{ij}{}_{mn} = g^{jk}R^{i}{}_{kmn} = K\left(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m\right)$ が得られる。すなわち,『定曲率空間』である。

$\therefore\ R^j_n = R^{mj}{}_{mn} = K\left(\delta^m_m\delta^j_n - \delta^m_n\delta^j_m\right) = K\left(3\delta^j_n - \delta^j_n\right) = 2K\delta^j_n, \qquad R = R^n_n = 2K\delta^n_n = 2K\times 3 = 6K$

3. 一様等方空間の計量の標準形： 一様等方空間では，以下の２つの座標系もよく用いられる。

(a) 固有球面積座標 ： $r = \sigma(\chi) = \dfrac{\sinh\left(\sqrt{-K}\chi\right)}{\sqrt{-K}}$ を動径座標に用いる。

$$\begin{cases} \cdot\ 1 - Kr^2 = 1 - K\left(\dfrac{\sinh\left(\sqrt{-K}\chi\right)}{\sqrt{-K}}\right)^2 = 1 + \sinh^2\left(\sqrt{-K}\chi\right) = \cosh^2\left(\sqrt{-K}\chi\right) \\ \cdot\ dr = \dfrac{d\sigma(\chi)}{d\chi}\,d\chi = \cosh\left(\sqrt{-K}\chi\right)\,d\chi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \to\ ds^2 &= d\chi^2 + \sigma(\chi)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\ &= \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \end{aligned}$$

※ この形で現れることが多い。

(b) 等方座標 ： 座標変換 $r(\rho) = \rho\left(1 + \dfrac{K}{4}\rho^2\right)^{-1}$ をおこなう。

$$\begin{cases} \cdot\ 1 - Kr^2 = \left(\dfrac{1 - \dfrac{K}{4}\rho^2}{1 + \dfrac{K}{4}\rho^2}\right)^2 \\ \cdot\ dr = \dfrac{dr(\rho)}{d\rho}\,d\rho = \dfrac{1 - \dfrac{K}{4}\rho^2}{\left(1 + \dfrac{K}{4}\rho^2\right)^2}\,d\rho \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \to\ ds^2 &= \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \\ &= \left(1 + \frac{K}{4}\rho^2\right)^{-2}\left\{d\rho^2 + \rho^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right\} \end{aligned}$$

$\downarrow$ $(x, y, z) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$ で定義される座標 (x, y, z) を用いる。

$$= \left\{1 + \frac{K}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right\}^{-2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \qquad (*)$$

※ 計量 $(*)$ は (x, y, z)-空間において，原点の周りの回転対称性をもつ。