〔４次元時空計量の例〕　※ c は真空中の光の速さ，G は万有引力定数。

（１）ミンコフスキー（Minkowski）時空

● 慣性座標系：$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= \sum_{a,b=0}^{3} \eta_{ab} dx^a dx^b \quad ※\ \eta_{ab} \equiv \mathrm{diag.}(-1, +1, +1, +1) \equiv \begin{cases} -1 & (a=b=0) \\ +1 & (a=b=1 \sim 3) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}$$

● 球面極座標系：$(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\ :\ 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi$$

● ペンローズ（Penrose）の時空図：$ct \pm r = \tan\dfrac{\xi \pm \chi}{2}$（複号同順）

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos\xi + \cos\chi)^2}\Big(-d\xi^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\Big)\ :\ |\xi \pm \chi| < \pi \text{ かつ } \chi > 0$$

（２）ニュートン（Newton）的計量

● $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2\phi_N\, dt^2$ ： ϕ_Nは重力ポテンシャル

※ ϕ_Nはポワッソン（Poisson）方程式 $\nabla\phi_N = 4\pi G\rho$ の解 ： ρは質量密度

（３）シュバルツシルト（Schwarzschild）の外部解　※ $m \equiv \dfrac{GM}{c^2} \approx 1.45\left(\dfrac{M}{M_{太陽}}\right)\mathrm{km}$

● $$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\ :\ 2m < r < \infty$$
$$= -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) + \frac{2GM}{r}dt^2 + \frac{2m}{r-2m}dr^2$$
$$\downarrow\ (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\ :\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2GM}{r}dt^2 + \frac{2m}{r-2m}\left(\frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz\right)^2$$
$$\mapsto -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2GM}{r}dt^2\ :\ \text{ニュートン極限}\ (m \mapsto 0)$$

※ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ より $2rdr = 2xdx + 2ydy + 2zdz$ となり，$dr = \dfrac{x}{r}dx + \dfrac{y}{r}dy + \dfrac{z}{r}dz$ が導かれる。

（４）ロバートソン・ウォーカー（Robertson・Walker）計量　※ 一様等方宇宙モデル

● $$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right)\ :\ a(t) > 0 \text{ はスケール因子，} K \text{ は曲率定数。}$$
$$= -c^2dt^2 + a(t)^2\left(d\chi^2 + \left(\frac{\sinh(\sqrt{-K}\chi)}{\sqrt{-K}}\right)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right)\ :\ r = \frac{\sinh\left(\sqrt{-K}\,\chi\right)}{\sqrt{-K}}$$
$$= -c^2dt^2 + a(t)^2\left(1 + \frac{K}{4}R^2\right)^{-2}\Big(dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\Big)\ :\ r = R\left(1 + \frac{K}{4}R^2\right)^{-1}$$
$$\downarrow\ (X, Y, Z) = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)\ :\ R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$= -c^2dt^2 + a(t)^2\left(1 + \frac{K}{4}R^2\right)^{-2}\Big(\ \underline{dX^2 + dY^2 + dZ^2}\ \Big)$$

↑ <u>３次元ユークリッド計量</u>