[平坦な時空上の重力波]

1. 弱い重力場

(a) 計量のゆらぎ

ミンコフスキー計量をもつ平坦な時空に計量の微小なゆらぎが加わるとき，$\epsilon > 0$ を微小量として計量 g_{ab} を

$$\text{計量}\ :\ g_{ab} = g_{ba} = \eta_{ab} + \epsilon h_{ab} + \epsilon^2 f_{ab} + \mathcal{O}(\epsilon^3),\quad \text{ミンコフスキー計量}\ :\ \left(\eta_{ab}\right) = \left(\eta^{ab}\right) = \mathrm{diag}[-1,1,1,1]$$

と表す。このとき，$g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$ より g^{ab} は ϵ の１次の精度で，次のようになる。

$$g^{ab} = g^{ba} = \eta^{ab} - \epsilon h^{ab},\quad \text{ここで}\ h^{ab} \equiv \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd}\ \left[\ h^a{}_b \equiv \eta^{ac}h_{cb} = \eta^{ac}h_{bc} \equiv h_b{}^a,\ \eta^{ab}f_{ab} = \eta_{ab}f^{ab} = f^a{}_a = f_a{}^a\ \right]$$

◎ 上記の例のように，h_{ab} と f_{ab} の添え字の上下はミンコフスキー計量を用いて定義されるものとする。

(b) １次の摂動 (ϵ について１次の項)

後の便宜上，(任意の) $p^{ab} = p^{ba}$ と $k_{ab} = k_{ba}$ を変数とする汎関数を導入し，幾何学量を表現する。

(i) 接続係数：$^{(1)}\Gamma^a_{bc} = \epsilon\gamma^a_{bc}[\eta, h]$，ここで $\gamma^a_{bc}[p,k] \equiv \dfrac{1}{2}p^{ad}(\partial_b k_{dc} + \partial_c k_{bd} - \partial_d k_{bc})\ \rightarrow\ \Gamma^a_{bc} = \gamma^a_{bc}[g,g]$

(ii) リッチテンソル：$^{(1)}R_{ab} = \epsilon\Re_{ab}[\eta,h]$，ここで $\Re_{ab}[p,k] \equiv \dfrac{1}{2}p^{cd}(\partial_c\partial_a k_{bd} + \partial_c\partial_b k_{ad} - \partial_c\partial_d k_{ab} - \partial_a\partial_b k_{cd})$

(iii) アインシュタインテンソル：$G_{ab} \equiv R_{ab} - \dfrac{R}{2}g_{ab} = \epsilon\mathcal{G}_{ab}[\eta,\psi] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \equiv^{(1)} G_{ab}$

ここで $\psi_{ab} \equiv h_{ab} - \dfrac{1}{2}h^c{}_c\eta_{ab}$，$\mathcal{G}_{ab}[p,k] \equiv \dfrac{1}{2}p^{cd}(\partial_c\partial_a k_{bd} + \partial_c\partial_b k_{ad} - \partial_c\partial_d k_{ab} - \eta_{ab}\eta^{ef}\partial_c\partial_e k_{df})$

(c) 汎関数の性質

(i) 重要な恒等式：$p^{ab} = \eta^{ab}$ のとき，任意の $k_{ab} = k_{ba}$ について $\partial^b\mathcal{G}_{ab}[\eta,k] \equiv \eta^{bc}\partial_c\mathcal{G}_{ab}[\eta,k] = 0$ が，成り立つ。

(ii) 汎関数の線形性：$\gamma^a_{bc}[p,k]$，$\Re_{ab}[p,k]$，および $\mathcal{G}_{ab}[p,k]$ は，変数 p^{ab} と k_{ab} についてそれぞれ線形である。

(例) $\gamma^a_{bc}[\alpha p + \beta q, k] = \alpha\gamma^a_{bc}[p,k] + \beta\gamma^a_{bc}[q,k]$，$\gamma^a_{bc}[p, \alpha k + \beta\ell] = \alpha\gamma^a_{bc}[p,k] + \beta\gamma^a_{bc}[p,\ell]$ (αとβは任意定数)

(ii) 汎関数表示の応用例

$$\Gamma^a_{bc} = \gamma^a_{bc}[g,g] = \gamma^a_{bc}[\eta - \epsilon h, \eta + \epsilon h + \epsilon^2 f] = \gamma^a_{bc}[\eta - \epsilon h, \epsilon h + \epsilon^2 f]\ \leftarrow\ \partial_a\eta_{bc} = 0\ \text{より (３つめの等号)}$$
$$= \gamma^a_{bc}[\eta, \epsilon h + \epsilon^2 f] - \epsilon\gamma^a_{bc}[h, \epsilon h + \epsilon^2 f]\ \leftarrow\ \text{汎関数の線形性より (次の等号も同様)}$$
$$= \epsilon\gamma^a_{bc}[\eta,h] + \epsilon^2\left(\gamma^a_{bc}[\eta,f] - \gamma^a_{bc}[h,h]\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \equiv^{(1)} \Gamma^a_{bc} + {}^{(2)}\Gamma^a_{bc},\ \text{ここで}\ {}^{(1)}\Gamma^a_{bc} = \mathcal{O}(\epsilon),\ {}^{(2)}\Gamma^a_{bc} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

2. 座標条件と調和ゲージ (横波ゲージ)

(a) 座標の不定性とゆらぎのゲージ変換：座標の $\mathcal{O}(\epsilon)$ の不定性 $\rightarrow$ h^{ab} の不定性

座標の微小変換にともなう計量の変換：$\left\{x^a; g^{ab} \equiv \eta^{ab} - \epsilon h^{ab}\right\}$，$\left\{\hat{x}^a \equiv x^a - \epsilon\xi^a; \hat{g}^{ab} \equiv \eta^{ab} - \epsilon\hat{h}^{ab}\right\}$

$$\hat{g}^{ab} = \frac{\partial\hat{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial\hat{x}^b}{\partial x^d}g^{cd} = (\delta^a_c - \epsilon\partial_c\xi^a)\left(\delta^b_d - \epsilon\partial_d\xi^b\right)\left(\eta^{cd} - \epsilon h^{cd}\right)$$
$$= \eta^{ab} - \epsilon\left(h^{ab} + \partial^a\xi^b + \partial^b\xi^a\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \equiv \eta^{ab} - \epsilon\hat{h}^{ab},\quad \text{ここで}\ \partial^a \equiv \eta^{ac}\partial_c = \eta^{ca}\partial_c$$

◎ 一般座標変換に対する不変性をもたない η^{ab} を基準に，計量のゆらぎ h^{ab} を定義 $\rightarrow$ h^{ab} のゲージ変換

$$(*)\quad \hat{h}^{ab} = h^{ab} + \underline{\partial^a\xi^b + \partial^b\xi^a}\quad \left[\ \frac{\partial\hat{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial\hat{x}^b}{\partial x^d}\eta^{cd} \neq \eta^{ab}\ \rightarrow\ \epsilon h^{ab} \equiv \eta^{ab} - g^{ab}\ \text{の変換則に}\underline{\text{非テンソル的項}}\text{が出現}\ \right]$$

(b) 調和座標条件：４つの座標関数 x^μ $(\mu = 0 \sim 3)$ が一般化されたラプラス方程式の解であることを要請する。

<u>関数 x^μ のラプラシアン</u> ：$\underline{g^{ab}\nabla_a\partial_b x^\mu} = g^{ab}\left\{\partial_a\left(\partial_b x^\mu\right) - \Gamma^c_{ba}\left(\partial_c x^\mu\right)\right\} = -g^{ab}\Gamma^\mu_{ab} = 0\ \rightarrow\ \epsilon\partial_b\psi^{\mu b} = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

(c) 任意の系 $(\hat{x}^a)$ から調和座標 (x^a) へのゲージ変換：$\psi^{ab} \equiv h^{ab} - \dfrac{1}{2}h^c{}_c\eta^{ab} \rightarrow \psi^a{}_a = -h^a{}_a$

ψ^{ab} のゲージ変換：$(*)$ より，$\hat{\psi}^{ab} \equiv \hat{h}^{ab} - \dfrac{1}{2}\hat{h}^c{}_c\eta^{ab} = \psi^{ab} + \partial^a\xi^b + \partial^b\xi^a - \partial_c\xi^c\eta^{ab}$

$$\partial_b\hat{\psi}^{ab} = \partial_b\psi^{ab} + \partial_c\partial^c\xi^a \equiv \partial_b\psi^{ab} - \Box\xi^a,\ \text{ここで}\ \Box\xi^a \equiv -\partial_c\partial^c\xi^a = \frac{\partial^2\xi^a}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\xi^a}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\xi^a}{\partial z^2}\quad (x^0 \equiv ct)$$

(i) 任意の系 $(\hat{x}^a)$ で非斉次波動方程式 $\Box\xi^a = -\partial_b\hat{\psi}^{ab}$ の特解 (例えば遅延ポテンシャル型の解) を１つ求める。

(ii) 座標変換 $\hat{x}^a = x^a - \epsilon\xi^a$ にともなうゲージ変換により座標系 (x^a) では，$\partial_b\psi^{ab} = \partial_b\hat{\psi}^{ab} + \Box\xi^a = 0$ となる。

(iii) $\psi^{ab}(x^c) = \displaystyle\int \Psi^{ab}(k_c)\,\mathrm{e}^{ik_cx^c}d^4k$ (平面波展開) $\to$ 調和座標条件より，$k_b\Psi^{ab} = k_b\Psi^{ba} = 0$ (広義の横波条件)

(d) 線形化されたアインシュタイン方程式と遅延ポテンシャル型の特解

以下では表記の便宜上，ψ^{ab} を微小量とみなすことにより，摂動展開のパラメータである ϵ の値を 1 とする。

$$^{(1)}G^{ab} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \frac{8\pi G}{c^4}T^{ab} \ \to\ \text{調和ゲージ : } (\dagger)\ \Box\psi^{ab} = \frac{16\pi G}{c^4}T^{ab},$$

◎ 非斉次波動方程式 (†) に対する遅延ポテンシャル型の特解：$\psi^{ab}_{\mathrm{ret}}(\mathbf{r},t) = \dfrac{4G}{c^4}\displaystyle\int \frac{T^{ab}\left(\mathbf{x}, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}d^3x$

3. TT ゲージ (Transverse-Traceless ゲージ) での重力波

(a) 平面重力波解

(i) 真空解 $(T^{ab} = 0)$: $\Box\psi^{ab} = 0 \to \psi^{ab}(\mathbf{r},t) = \displaystyle\int \Psi^{ab}(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}d^3k,\ \ \omega^2 = c^2|\mathbf{k}|^2$ (平面波解の重ね合わせ)

(ii) 波が各波数ベクトル $\mathbf{k}$ ごとに互いに独立に伝播 $\to \mathbf{k}$ を 1 つ固定し，その方向に $z \equiv x^3$ 軸を選ぶ。

$\psi^{ab}(z,t) = A^{ab}\cos k(z - ct)$ (振幅 A^{ab}は実定数), $\partial_b\psi^{ab} = 0 \ \to\ A^{a3} = A^{3a} = A^{a0} = A^{0a}$ (#)

(#) より, A^{ab} の独立成分は $A^{00},\ A^{01},\ A^{02},\ A^{11},\ A^{12},\ A^{22}$

◎ 横波条件を保つゲージ変換の自由度がまだ残っているため，A^{ab} の独立成分の数を減らすことができる。

(b) 横波条件を保つゲージ変換と TT ゲージ

(i) 座標変換 : $\bar{x}^a = x^a - \epsilon\lambda^a$, ここで λ^a は波動方程式 $\Box\lambda^a = 0$ の任意の解 $\to\ \partial_b\bar{\psi}^{ab} = \partial_b\psi^{ab} - \Box\lambda^a = 0$

(ii) 平面波解 $\psi^{ab}(z,t) = A^{ab}\cos k(z - ct)$ に対し，Λ^a を実定数として $\lambda^a = \Lambda^a\sin k(z - ct)$ とする。

$\bar{\psi}^{ab} = \psi^{ab} + \partial^a\lambda^b + \partial^b\lambda^a - \partial_c\lambda^c\eta^{ab} \equiv \bar{A}^{ab}\cos k(z - ct)\ \to$ 係数 A^{ab}の変換則 $(A^{ab} \to \bar{A}^{ab})$

[係数 A^{ab}のゲージ変換] $\begin{cases} \bar{A}^{00} = A^{00} + k(\Lambda^0 + \Lambda^3),\ \bar{A}^{01} = A^{01} + k\Lambda^1,\ \bar{A}^{02} = A^{02} + k\Lambda^2 \\ \bar{A}^{11} = A^{11} + k(\Lambda^0 - \Lambda^3),\ \bar{A}^{22} = A^{22} + k(\Lambda^0 - \Lambda^3),\ \bar{A}^{12} = A^{12} \end{cases}$

(iii) 重力波の自由度 : $\bar{A}^{12} = A^{12} \equiv A_\times,\ \ \bar{A}^{11} - \bar{A}^{22} = A^{11} - A^{22} \equiv 2A_+$

(iv) TT ゲージ : 係数 Λ^a を次のように選ぶとき，$\bar{A}^{a0} = 0\ (a = 0 \sim 3)$ となり，同時に $\bar{A}^{ab}$ の対角和も 0 になる。

$$\Lambda^1 = -\frac{A^{01}}{k},\ \Lambda^2 = -\frac{A^{02}}{k},\ \Lambda^0 + \Lambda^3 = -\frac{A^{00}}{k},\ \Lambda^3 - \Lambda^0 = \frac{A^{11} + A^{22}}{2k}\ \to\ \left[\bar{A}^{ab}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 孤立系からの重力波放射 : $\psi^{ab}_{\mathrm{ret}}(\mathbf{r},t) = \dfrac{4G}{c^4}\displaystyle\int_V \frac{T^{ab}\left(\mathbf{x}, t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}d^3x$ (孤立系 : 重力源が領域 V の内部に局在)

(a) 重力源に対する条件 (以下では $i,j,k = 1 \sim 3$)

(i) 波動域 $\mathbf{r}$: 座標原点を重力源の重心付近に選ぶとき，$T^{ab} \neq 0$ となる任意の $\mathbf{x}$ について $r \equiv |\mathbf{r}| >> |\mathbf{x}|$

(ii) 時間変化が遅い系 : $\psi^{ab}_{\mathrm{ret}}(\mathbf{r},t) = \dfrac{4G}{c^4 r}\displaystyle\int_V T^{ab}\left(\mathbf{x}, t - \frac{r}{c}\right)d^3x\ \leftarrow\ t - \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}|}{c} \approx t - \dfrac{r}{c}$

(iii) 弱い自己重力 : $\nabla_b T^{ab} \approx \partial_b T^{ab} = 0\ \to$ [恒等式] $\dfrac{\partial^2\left(T^{00}x^ix^j\right)}{c^2\partial t^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\partial_k\left\{x^ix^j\partial_0 T^{0k} + x^iT^{kj} + x^jT^{ik}\right\} = 2T^{ij}$

$$\begin{aligned} 2\int_V T^{ij}d^3x &= \int_V\left[\frac{\partial^2\left(T^{00}x^ix^j\right)}{c^2\partial t^2} + \sum_{k=1}^{3}\partial_k\left\{x^ix^j\partial_0T^{0k} + x^iT^{kj} + x^jT^{ik}\right\}\right]d^3x \quad (\text{領域 } V \text{ の表面を } S \text{ とする}) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\int_V T^{00}c^{-2}x^ix^jd^3x + \sum_{k=1}^{3}\int_S\left\{x^ix^j\partial_0T^{0k} + x^iT^{kj} + x^jT^{ik}\right\}n_kdS \quad (n_k\text{は単位法ベクトル}) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\int_V \rho x^ix^jd^3x,\ \rho \equiv T^{00}c^{-2} \quad \left[\ 2\text{つめの等号 : 発散定理},\ \ 3\text{つめの等号 : } S \text{ 上では } T^{ab} = 0\ \right] \end{aligned}$$

(b) 波動域での遅延解：ここで $\rho \equiv c^{-2}T^{00}\left(\mathbf{x}, t-\frac{r}{c}\right)$ $\left[\, t-\frac{r}{c}\text{ は遅延時間}\,\right]$

$$\psi^{00}(\mathbf{r},t)=\frac{4G}{c^4 r}\int_V T^{00}\left(\mathbf{x},t-\frac{r}{c}\right)d^3x=\frac{4G}{c^2 r}\int_V \rho d^3x \equiv \frac{4GM}{c^2 r},\quad \text{ここで } M\equiv\int_V \rho d^3x \text{ は系の全質量}$$

$$\psi^{0i}(\mathbf{r},t)=\psi^{i0}(\mathbf{r},t)=\frac{4G}{c^4 r}\int_V T^{0i}\left(\mathbf{x},t-\frac{r}{c}\right)d^3x \quad \left[\text{ 恒等式 ： } \partial_0\left(x^iT^{00}\right)+\sum_{k=1}^{3}\partial_k\left(x^iT^{0k}\right)=T^{0i}\,\right]$$

$$=\frac{4G}{c^2 r}\int_V\left[\partial_0\left\{x^iT^{00}\left(\mathbf{x},t-\frac{r}{c}\right)\right\}+\sum_{k=1}^{3}\partial_k\left\{x^iT^{0k}\left(\mathbf{x},t-\frac{r}{c}\right)\right\}\right]d^3x \ \leftarrow\ \text{発散定理より２項目は0}$$

$$=\frac{4G}{cr}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho x^i d^3x \ :\ \int_V \rho x^i d^3x \text{ は質量の双極子モーメント}$$

$$\psi^{ij}(\mathbf{r},t)=\psi^{ji}(\mathbf{r},t)=\frac{4G}{c^4 r}\int_V T^{ij}\left(\mathbf{x},t-\frac{r}{c}\right)d^3x=\frac{2G}{c^4 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_V \rho x^i x^j d^3x$$

◎ 自習課題：$\partial_b T^{ab}=0$ を用いて $\partial_0\psi^{a0}=0$ を示せ。 $\left[\ \psi^{00}\text{ と }\psi^{i0}\text{ は，波動成分 (重力波) を含まない。}\right]$

(c) 重力波の四重極放射 $\left[\text{ 電磁波では通常，双極子放射が支配的 }\right]$

波動域 ($|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{x}|$) において ψ^{ij} は，球面波のようにふるまい，すべての波長成分について重力波の進行方向が，$\mathbf{r}$ 方向と一致する。このとき重力波は，恒星からの光のように実質的には平面波のように観測され，すべての波長域についてTT ゲージが，実現する。以下では表記の簡単化のために，３次元の添え字についてもアインシュタインの和の規則を適用する。なお，３次元の添え字には上下の区別が，ない。

◎ 重力波成分の抽出方法

(ｉ) ψ^{ij} のトレースレス成分 $\tilde{\psi}^{ij}$ を求める。 $\left[\ Q^{ij}\text{ は質量の四重極モーメント }\right]$

$$\tilde{\psi}^{ij}\equiv\psi^{ij}-\frac{1}{3}\delta_{k\ell}\psi^{k\ell}\delta^{ij}=\frac{2G}{3c^4 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_V \rho\left\{3x^ix^j-|\mathbf{x}^2|\delta^{ij}\right\}d^3x\equiv\frac{2G}{3c^4 r}\ddot{Q}^{ij},\quad Q^{ij}\equiv\int_V \rho\left\{3x^ix^j-|\mathbf{x}^2|\delta^{ij}\right\}d^3x$$

(ii) $\tilde{\psi}^{ij}$ の TT 成分 ψ^{ij}_{TT} を求める。 $\left[\ \hat{r}^i=\hat{r}_i\text{ は }\mathbf{r}\text{ 方向の単位ベクトル }\right]$

$$\psi^{ij}_{TT}\equiv\left(P^i{}_kP^j{}_\ell-\frac{1}{2}P^{ij}P_{k\ell}\right)\tilde{\psi}^{k\ell},\quad \text{ここで } P^{ij}=P_{ij}=P^i{}_j\equiv\delta^i{}_j-\hat{r}^i\hat{r}_j\ \to\ \psi^{ij}_{TT}\hat{r}_j=\psi^{ji}_{TT}\hat{r}_j=0,\ \psi_{TT}{}^i{}_i=0$$

5. ２次の摂動 (ϵ について２次の項)

(a) 接続係数：${}^{(2)}\Gamma^a_{bc}=\epsilon^2\left(\gamma^a_{bc}[\eta,f]-\gamma^a_{bc}[h,h]\right)$

(b) リッチテンソル：$R_{ab}=\partial_c\Gamma^c_{ab}-\partial_b\Gamma^c_{ac}+\Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd}-\Gamma^c_{ad}\Gamma^d_{cb}$

$$\begin{aligned}R_{ab}&=\partial_c\Gamma^c_{ab}-\partial_b\Gamma^c_{ac}+\Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd}-\Gamma^c_{ad}\Gamma^d_{cb}\\&=\partial_c\left({}^{(1)}\Gamma^c_{ab}+{}^{(2)}\Gamma^c_{ab}\right)-\partial_b\left({}^{(1)}\Gamma^c_{ac}+{}^{(2)}\Gamma^c_{ac}\right)+{}^{(1)}\Gamma^c_{ab}{}^{(1)}\Gamma^d_{cd}-{}^{(1)}\Gamma^c_{ad}{}^{(1)}\Gamma^d_{cb}+\mathcal{O}(\epsilon^3)\\&\equiv{}^{(1)}R_{ab}+{}^{(2)}R_{ab},\ \text{ここで } {}^{(1)}R_{ab}=\mathcal{O}(\epsilon),\ {}^{(2)}R_{ab}=\mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}^{(2)}R_{ab}&=\partial_c{}^{(2)}\Gamma^c_{ab}-\partial_b{}^{(2)}\Gamma^c_{ac}+{}^{(1)}\Gamma^c_{ab}{}^{(1)}\Gamma^d_{cd}-{}^{(1)}\Gamma^c_{ad}{}^{(1)}\Gamma^d_{cb}\\&=\epsilon^2\left\{\underline{\partial_c\gamma^c_{ab}[\eta,f]}-\partial_c\gamma^c_{ab}[h,h]-\underline{\partial_b\gamma^c_{ac}[\eta,f]}+\partial_b\gamma^c_{ac}[h,h]+\gamma^c_{ab}[\eta,h]\gamma^d_{cd}[\eta,h]-\gamma^c_{ad}[\eta,h]\gamma^d_{cb}[\eta,h]\right\}\\&=\epsilon^2\left\{\underline{\Re_{ab}[\eta,f]}-\partial_c\gamma^c_{ab}[h,h]+\partial_b\gamma^c_{ac}[h,h]+\gamma^c_{ab}[\eta,h]\gamma^d_{cd}[\eta,h]-\gamma^c_{ad}[\eta,h]\gamma^d_{cb}[\eta,h]\right\}\\&\equiv\epsilon^2\left\{\Re_{ab}[\eta,f]+\mathcal{H}_{ab}[h]\right\},\quad \text{ここで } \mathcal{H}_{ab}[h]\text{ は }h\text{ について２次の非線形項}\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{ab}[h]\equiv-\Re_{ab}[h,h]+\frac{1}{4}\partial_a h^{cd}\partial_b h_{cd}+\frac{1}{2}\partial^c h_a{}^d\left(\partial_c h_{db}-\partial_d h_{cb}\right)-\frac{1}{2}\partial_d\psi^{cd}\left(\partial_a h_{cb}+\partial_b h_{ac}-\partial_c h_{ab}\right)$$

ここで $\psi^{cd}\equiv h^{cd}-\frac{1}{2}\eta^{cd}h^e{}_e,\ \partial^c\equiv\eta^{ce}\partial_e$

(c) アインシュタインテンソル：$G_{ab}\equiv R_{ab}-\frac{1}{2}g^{cd}R_{cd}g_{ab}$

$$\begin{aligned}G_{ab}&={}^{(1)}R_{ab}+{}^{(2)}R_{ab}-\frac{1}{2}\left(\eta^{cd}-\epsilon h^{cd}\right)\left({}^{(1)}R_{cd}+{}^{(2)}R_{cd}\right)\left(\eta_{ab}+\epsilon h_{ab}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^3)\\&={}^{(1)}R_{ab}-\frac{1}{2}\eta^{cd}\,{}^{(1)}R_{cd}\eta_{ab}+{}^{(2)}R_{ab}-\frac{1}{2}\eta^{cd}\,{}^{(2)}R_{cd}\eta_{ab}+\frac{\epsilon}{2}h^{cd}\,{}^{(1)}R_{cd}\eta_{ab}-\frac{\epsilon}{2}\eta^{cd}\,{}^{(1)}R_{cd}h_{ab}+\mathcal{O}(\epsilon^3)\\&\equiv{}^{(1)}G_{ab}+{}^{(2)}G_{ab},\quad \text{ここで } {}^{(1)}G_{ab}=\mathcal{O}(\epsilon),\ {}^{(2)}G_{ab}=\mathcal{O}(\epsilon^2)\end{aligned}$$

$$ {}^{(2)}G_{ab} = {}^{(2)}R_{ab} - \frac{1}{2}\eta^{cd}\,{}^{(2)}R_{cd}\eta_{ab} + \frac{\epsilon}{2}h^{cd}\,{}^{(1)}R_{cd}\eta_{ab} - \frac{\epsilon}{2}\eta^{cd}\,{}^{(1)}R_{cd}h_{ab} $$

$\equiv \epsilon^2\Big\{\mathcal{G}_{ab}[\eta,\phi] + \tau_{ab}\Big\}$，ここで $\phi_{ab} \equiv f_{ab} - \frac{1}{2}f^c{}_c\eta_{ab}$，$\tau_{ab}$ は h_{ab} について２次の非線形項

$$ \tau_{ab} \equiv \mathcal{H}_{ab}[h] - \frac{1}{2}\eta^{cd}\Re_{cd}[\eta,h]h_{ab} + \frac{1}{2}\Big\{h^{cd}\Re_{cd}[\eta,h] - \eta^{cd}\mathcal{H}_{cd}[h]\Big\}\eta_{ab} $$

6. 重力波によるエネルギー輸送

以下では表記の便宜上，ψ^{ab} と ϕ^{ab} を微小量とみなすことにより，摂動展開のパラメータである ϵ の値を 1 とする。

(a) 重力場のエネルギー運動量擬テンソル

(i) 真空中のアインシュタイン方程式 ： $\mathcal{G}_{ab}[\eta,\psi+\phi] + \mathcal{O}(\epsilon^3) = -\tau_{ab} \equiv \frac{8\pi G}{c^4}t_{ab}$，$t_{ab} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G}\tau_{ab}$

◎ アインシュタイン方程式 $G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}$ との類似性から，t_{ab} を重力場のエネルギー運動量擬テンソルという。

(ii) 汎関数の性質 **1.(c) − (i)** ： $\partial^b\mathcal{G}_{ab}[\eta,k] = 0$ $(k^{ab} = k^{ba}$は任意$)$ $\to$ $\partial_b t^{ab} = 0$，ここで $t^{ab} \equiv \eta^{ac}\eta^{bd}t_{cd}$

(iii) 保存則：$c\partial_b t^{ab} = \frac{\partial t^{a0}}{\partial t} + c\partial_i t^{ai} = 0$ $\to$ $\frac{d}{dt}\int_V t^{a0}dV = -\int_V c\partial_i t^{ai}dV = -\int_S ct^{ai}n_i dS$ （S からの流出分）

◎ (iii) より，重力場のエネルギー流束ベクトル (単位時間・単位面積あたりの流出量) は，ct^{0i} で与えられる。

(b) 平均操作と Isaacson の公式

(i) 実際上，観測される重力波は波の数周期分にわたる平均量：$t^{0i} \to \langle t^{0i}\rangle$ とする。

(ii) 重力波は準周期的：微分の平均値を微小量とみなす。 $\Big[\ \langle\partial_a\mathcal{F}[h_{ab}]\rangle \approx 0 \ \text{ for } \ \forall\mathcal{F}[h_{ab}]\ \Big]$

◎ 部分積分公式：(ii) より $\langle(\partial_c\mathcal{F}_1[h_{ab}])\mathcal{F}_2[h_{ab}]\rangle = -\langle\mathcal{F}_1[h_{ab}](\partial_c\mathcal{F}_2[h_{ab}])\rangle$ for $\forall\mathcal{F}_1[h_{ab}]$, $\forall\mathcal{F}_2[h_{ab}]$

(iii) Isaacson の公式 (TT ゲージ)：$\langle t_{ab}\rangle_{TT} = \frac{c^4}{32\pi G}\Big\langle(\partial_a\psi_{cd})(\partial_b\psi^{cd})\Big\rangle_{TT} \leftarrow \partial_b\psi^{ab} = 0,\ \psi^a{}_a = 0,\ \Box\psi^{ab} = 0$

(c) 四重極公式：$t_* \equiv t - \frac{r}{c}$ は遅延時間，$Q^{ij}(t_*) \equiv \int_V \rho\left(3x^i x^j - |\mathbf{x}|^2\delta^{ij}\right)d^3x$ は質量の四重極モーメント

◎ S を半径 r の球面とし，極限 $r \to \infty$ をとる。

(i) S 上：$dS = r^2 d\Omega$，$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ (立体角要素の極座標表示)，$(n_i) = (\hat{r}_i) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

(ii) 単位時間・単位立体角あたりのエネルギー放射率：$-\frac{\Delta E}{\Delta t\Delta\Omega} = \langle ct^{0i}n_i\rangle_{TT}r^2$

(iii) 孤立系からの重力波によるエネルギー放射率 (四重極公式)

$$ -\frac{\Delta E}{\Delta t\Delta\Omega} = \frac{G}{72\pi c^5}\left\langle\frac{d^3Q^{ij}}{dt_*{}^3}\frac{d^3Q^{k\ell}}{dt_*{}^3}\right\rangle\left(P_{ik}P_{j\ell} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{k\ell}\right),\ P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j $$

↓ 立体角積分を実行

$$ -\frac{dE}{dt} = \frac{G}{72\pi c^5}\left\langle\frac{d^3Q^{ij}}{dt_*{}^3}\frac{d^3Q^{k\ell}}{dt_*{}^3}\right\rangle\int\left(P_{ik}P_{j\ell} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{k\ell}\right)d\Omega = \frac{G}{45c^5}\left\langle\frac{d^3Q^{ij}}{dt_*{}^3}\frac{d^3Q^{ij}}{dt_*{}^3}\right\rangle $$

◎ 立体角積分についての諸公式

∘ $\int d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = 4\pi$

∘ 対称性より $\int n_i n_j d\Omega = \alpha\delta_{ij}$ とおき，両辺のトレースをとる。

$\int n_i n_i d\Omega = \int d\Omega = 4\pi,\ \alpha\delta_{ii} = 3\alpha \ \to\ \alpha = \frac{4\pi}{3}$

∘ 対称性より $\int n_i n_j n_k n_\ell d\Omega = \beta\left(\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}\right)$ とおき，両辺のトレースをとる。

$\int n_i n_i n_k n_k d\Omega = \int d\Omega = 4\pi,\ \beta\left(\delta_{ii}\delta_{kk} + \delta_{ik}\delta_{ik} + \delta_{ik}\delta_{ik}\right) = 15\beta \ \to\ \beta = \frac{4\pi}{15}$

∘ $Q^{ii} = 0$ より，和に寄与するのは次の項：$P_{ijk\ell} \equiv \delta_{ik}\delta_{j\ell} - n_i n_k\delta_{j\ell} - \delta_{ik}n_j n_\ell + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_\ell$

$\int P_{ijk\ell}d\Omega \to$ 係数因子 $\frac{8\pi}{5}$，$\frac{G}{72\pi c^5} \times \frac{8\pi}{5} = \frac{G}{45c^5}$