〔線形汎関数とテンソル〕

※ $X^{a'}_b \equiv \dfrac{\partial x^{a'}(x)}{\partial x^b}$ と $X^a_{b'} \equiv \dfrac{\partial x^a(x')}{\partial x^{b'}}$ はそれぞれ，（n 次元多様体の）ヤコビ行列 X と X^{-1} の成分を表す。

(1) 線形汎関数としての接ベクトルと１形式

(a) 線形汎関数の定義と双対関係

※ 任意の座標系 (x) における**座標基底**を $\begin{cases} \vec{e}_a & : \textbf{接ベクトルの基底} \\ \tilde{e}^a & : \textbf{１形式の基底} \end{cases}$ として，任意の接ベクトル $\vec{v}$ と任意の１形式 $\tilde{\omega}$ をそれぞれ，$\begin{cases} \vec{v} = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} v^a \vec{e}_a \\ \tilde{\omega} = \displaystyle\sum_{b=1}^{n} \omega_b \tilde{e}^b \end{cases}$ と表す。ただし $\vec{v}$ と $\tilde{\omega}$ について，成分と基底の積の**線形和（１次結合）**の形を強調するために，一時的に和記号 $\sum$ を明記する。

<u>定義</u> 次の３つの要請（記号 $\equiv$ の部分）により，**１変数線形汎関数**としての接ベクトルと１形式を再定義する。

(a-1) $\vec{v}(\tilde{\omega}) \equiv \tilde{\omega}(\vec{v})$ ： **内積の双対性**

(a-2) $\vec{e}_a(\tilde{e}^b) = \tilde{e}^b(\vec{e}_a) \equiv \delta^b_a$ ： **座標基底（双対基底）の基本内積**

(a-3) $\vec{v}(\tilde{\omega}) = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} v^a \vec{e}_a \Big(\sum_{b=1}^{n} \omega_b \tilde{e}^b\Big) \equiv \sum_{a=1}^{n} v^a \sum_{b=1}^{n} \omega_b \, \vec{e}_a(\tilde{e}^b)$ ： **関数部分と変数部分それぞれについての線形性**

(b) 基本公式 ※ 以下では $\displaystyle\sum_{a=1}^{n} v^a \vec{e}_a \to v^a \vec{e}_a$, $\displaystyle\sum_{a=1}^{n} \omega_a v^a \to \omega_a v^a$ のように，アインシュタインの表記法を用いる。

(b-1) $\underline{\vec{v}(\tilde{\omega})} = \underline{\tilde{\omega}(\vec{v})} = v^a \omega_b \, \vec{e}_a(\tilde{e}^b) = v^a \omega_b \delta^b_a = \underline{v^a \omega_a}$ ： **内積公式**

(b-2) $\underline{\vec{e}_{a'}(\tilde{e}^{b'})} = X^c_{a'} \vec{e}_c(X^{b'}_d \tilde{e}^d) = X^c_{a'} X^{b'}_d \vec{e}_c(\tilde{e}^d) = X^c_{a'} X^{b'}_d \delta^d_c = X^c_{a'} X^{b'}_c = \underline{\delta^{b'}_{a'}}$ ： **基本内積の座標独立性**

$$\therefore \quad \vec{e}_a(\tilde{e}^b) = \tilde{e}^b(\vec{e}_a) = \delta^b_a \ \text{ in } (x) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{e}_{a'}(\tilde{e}^{b'}) = \tilde{e}^{b'}(\vec{e}_{a'}) = \delta^{b'}_{a'} \ \text{ in } (x')$$

(b-3) $\begin{cases} \underline{v^a} = v^b \delta^a_b = v^b \vec{e}_b(\tilde{e}^a) = \underline{\vec{v}(\tilde{e}^a)} = \underline{\tilde{e}^a(\vec{v})} \\ \underline{\omega_a} = \omega_b \delta^b_a = \omega_b \tilde{e}^b(\vec{e}_a) = \underline{\tilde{\omega}(\vec{e}_a)} = \underline{\vec{e}_a(\tilde{\omega})} \end{cases}$ ： **汎関数値としての座標成分（座標成分の再定義）**

(b-4) $\begin{cases} \underline{v^{a'}} = \vec{v}(\tilde{e}^{a'}) = \vec{v}(X^{a'}_b \tilde{e}^b) = X^{a'}_b \vec{v}(\tilde{e}^b) = \underline{X^{a'}_b v^b} \\ \underline{\omega_{a'}} = \tilde{\omega}(\vec{e}_{a'}) = \tilde{\omega}(X^c_{a'} \vec{e}_c) = X^c_{a'} \tilde{\omega}(\vec{e}_c) = \underline{X^c_{a'} \omega_c} \end{cases}$ ： **座標成分の変換則（汎関数値としての導出）**

$$\therefore \quad \underline{v^{a'} \omega_{a'}} = X^{a'}_b v^b X^c_{a'} \omega_c = (X^{a'}_b X^c_{a'}) v^b \omega_c = \delta^c_b v^b \omega_c = v^c \omega_c = \underline{v^a \omega_a} \ : \ \textbf{内積公式の座標独立性}$$

(2) 多変数線形汎関数（テンソル）

<u>定義</u> r 個の任意の１形式の組 $\{\tilde{\omega}^1, \cdots, \tilde{\omega}^r\}$ と s 個の任意の接ベクトルの組 $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s\}$ を変数とする**多変数線形汎関数**を $\boldsymbol{(r,s)}$ **型テンソル**という。

※ 任意の接ベクトル $\vec{v}$ は $(1,0)$ 型テンソル，任意の１形式 $\tilde{\omega}$ は $(0,1)$ 型テンソルである。また，任意のスカラー関数 f について，これを変数をもたない汎関数とみなし，$(0,0)$ 型テンソルとする。

(a) 基底テンソル $\boldsymbol{e}^{b_1 \cdots b_s}_{a_1 \cdots a_r}$

<u>定義</u> 接ベクトルと１形式について，（任意の）座標系 (x) に関する成分表記をおこなうとき，(r,s) 型テンソル $\boldsymbol{e}^{b_1 \cdots b_s}_{a_1 \cdots a_r}$ を次の関係式で定義する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{b_1 \cdots b_s}_{a_1 \cdots a_r}(\tilde{\omega}^1, \cdots, \tilde{\omega}^r; \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s) &\equiv \vec{e}_{a_1}(\tilde{\omega}^1) \cdots \vec{e}_{a_r}(\tilde{\omega}^r) \ \tilde{e}^{b_1}(\vec{v}_1) \cdots \tilde{e}^{b_s}(\vec{v}_s) \\ &= (\omega^1)_{a_1} \cdots (\omega^r)_{a_r} (v_1)^{b_1} \cdots (v_s)^{b_s} \end{aligned}$$

<u>公式</u> 上記の定義より，$\boldsymbol{e}^{b_1 \cdots b_s}_{a_1 \cdots a_r}(\tilde{e}^{c_1}, \cdots, \tilde{e}^{c_r}; \vec{e}_{d_1}, \cdots, \vec{e}_{d_s}) = \delta^{c_1}_{a_1} \cdots \delta^{c_r}_{a_r} \delta^{b_1}_{d_1} \cdots \delta^{b_s}_{d_s}$ が導かれる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{b_1 \cdots b_s}_{a_1 \cdots a_r}(\tilde{e}^{c_1}, \cdots, \tilde{e}^{c_r}; \vec{e}_{d_1}, \cdots, \vec{e}_{d_s}) &= \vec{e}_{a_1}(\tilde{e}^{c_1}) \cdots \vec{e}_{a_r}(\tilde{e}^{c_r}) \ \tilde{e}^{b_1}(\vec{e}_{d_1}) \cdots \tilde{e}^{b_s}(\vec{e}_{d_s}) \quad : \ \textbf{定義}\text{より} \\ &= \delta^{c_1}_{a_1} \cdots \delta^{c_r}_{a_r} \delta^{b_1}_{d_1} \cdots \delta^{b_s}_{d_s} \quad : \ \textbf{座標基底の基本内積}\text{より} \end{aligned}$$

(b) テンソルの成分

定義 任意の (r,s) 型テンソル $\boldsymbol{A}$ について，n^{r+s} 個の実数の組 $A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}$ を次のように定義する。

$A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s} \equiv A(\tilde{e}^{a_1},\cdots,\tilde{e}^{a_r};\vec{e}_{b_1},\cdots,\vec{e}_{b_s})$ ： 座標系 (x) における $\boldsymbol{A}$ の**成分**

定理 任意の (r,s) 型テンソル $\boldsymbol{A}$ について，$\boldsymbol{A} = A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r}$ が成り立つ。

$\{\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r\}$ を任意の 1 形式の組，$\{\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s\}$ を任意の接ベクトルの組とする。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}(\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r;\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s)\\
&\quad= \underline{(\omega^1)_{a_1}\cdots(\omega^r)_{a_r}(v_1)^{b_1}\cdots(v_s)^{b_s}}\ \underline{\underline{\boldsymbol{A}(\tilde{e}^{a_1},\cdots,\tilde{e}^{a_r};\vec{e}_{b_1},\cdots,\vec{e}_{b_s})}} \quad : \ \text{多変数線形汎関数の性質}\\
&\quad= \underline{\boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r}(\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r;\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s)}\ \underline{\underline{A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}}} \quad : \ \text{定義より}\\
&\quad= \sum_{a_1\cdots a_r=1}^{n}\ \sum_{b_1\cdots b_s=1}^{n} A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r}(\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r;\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s) \quad : \ \text{線形和の形（和記号}\textstyle\sum\text{を明記）}
\end{aligned}
$$

変数（$\tilde{\omega}^1\cdots\vec{v}_s$）はすべて任意なので等式の両辺の変数部分を『省略』し，次の結果が得られる。

$$
\boldsymbol{A} = \sum_{a_1\cdots a_r=1}^{n}\ \sum_{b_1\cdots b_s=1}^{n} A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r} = A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r} \quad : \ \text{最後の等号は}\textbf{アインシュタインの記法}
$$

∴ (r,s) 型テンソルの集合 $\boldsymbol{T}^r_s$ は，$\boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r}$ を座標基底とする広義のベクトル空間（線形空間）である。

(c) 基底の変換則と成分の変換則

基底 $\boldsymbol{e}^{b'_1\cdots b'_s}_{a'_1\cdots a'_r} = X^{c_1}_{a'_1}\cdots X^{c_r}_{a'_r}X^{b'_1}_{d_1}\cdots X^{b'_s}_{d_s}\boldsymbol{e}^{d_1\cdots d_s}_{c_1\cdots c_r}$ ： **変換公式**

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}^{b'_1\cdots b'_s}_{a'_1\cdots a'_r}(\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r;\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s)\\
&\quad\equiv \vec{e}_{a'_1}(\tilde{\omega}^1)\cdots\vec{e}_{a'_r}(\tilde{\omega}^r)\tilde{e}^{b'_1}(\vec{v}_1)\cdots\tilde{e}^{b'_s}(\vec{v}_s) \quad \text{in} \quad (x')\\
&\quad= X^{c_1}_{a'_1}\cdots X^{c_r}_{a'_r}X^{b'_1}_{d_1}\cdots X^{b'_s}_{d_s}\vec{e}_{c_1}(\tilde{\omega}^1)\cdots\vec{e}_{c_r}(\tilde{\omega}^r)\tilde{e}^{d_1}(\vec{v}_1)\cdots\tilde{e}^{d_s}(\vec{v}_s) \quad : \quad \vec{e}_{a'} = X^c_{a'}\vec{e}_c \ \text{と}\ \tilde{e}^{b'} = X^{b'}_d\tilde{e}^d \ \text{より}\\
&\quad= X^{c_1}_{a'_1}\cdots X^{c_r}_{a'_r}X^{b'_1}_{d_1}\cdots X^{b'_s}_{d_s}\boldsymbol{e}^{d_1\cdots d_s}_{c_1\cdots c_r}(\tilde{\omega}^1,\cdots,\tilde{\omega}^r;\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_s) \quad : \quad \boldsymbol{e}^{d_1\cdots d_s}_{c_1\cdots c_r}\ \text{の}\textbf{定義}\text{より}
\end{aligned}
$$

変数（$\tilde{\omega}^1\cdots\vec{v}_s$）はすべて任意なので，$\boldsymbol{e}^{b'_1\cdots b'_s}_{a'_1\cdots a'_r} = X^{c_1}_{a'_1}\cdots X^{c_r}_{a'_r}X^{b'_1}_{d_1}\cdots X^{b'_s}_{d_s}\boldsymbol{e}^{d_1\cdots d_s}_{c_1\cdots c_r}$ が成り立つ。

成分 $A^{a'_1\cdots a'_r}_{b'_1\cdots b'_s} = X^{a'_1}_{c_1}\cdots X^{a'_r}_{c_r}X^{d_1}_{b'_1}\cdots X^{d_s}_{b'_s}A^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s}$ ： **変換公式**

$$
\begin{aligned}
A^{a'_1\cdots a'_r}_{b'_1\cdots b'_s} &\equiv \boldsymbol{A}(\tilde{e}^{a'_1},\cdots,\tilde{e}^{a'_r};\vec{e}_{b'_1},\cdots,\vec{e}_{b'_s}) \quad : \ \textbf{座標成分の定義 in} \ (\boldsymbol{x'})\\
&= \boldsymbol{A}(X^{a'_1}_{c_1}\tilde{e}^{c_1},\cdots,X^{a'_r}_{c_r}\tilde{e}^{c_r};X^{d_1}_{b'_1}\vec{e}_{d_1},\cdots,X^{d_s}_{b'_s}\vec{e}_{d_s}) \quad : \ \text{基底の変換}\\
&= X^{a'_1}_{c_1}\cdots X^{a'_r}_{c_r}X^{d_1}_{b'_1}\cdots X^{d_s}_{b'_s}\ \underline{\boldsymbol{A}(\tilde{e}^{c_1},\cdots,\tilde{e}^{c_r};\vec{e}_{d_1},\cdots,\vec{e}_{d_s})} \quad : \ \text{線形汎関数の性質}\\
&= X^{a'_1}_{c_1}\cdots X^{a'_r}_{c_r}X^{d_1}_{b'_1}\cdots X^{d_s}_{b'_s}\ \underline{A^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s}} \quad : \ \textbf{座標成分の定義 in} \ (\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\to\ A^{a'_1\cdots a'_r}_{b'_1\cdots b'_s}\ \boldsymbol{e}^{b'_1\cdots b'_s}_{a'_1\cdots a'_r} &= \left(X^{a'_1}_{c_1}\cdots X^{a'_r}_{c_r}X^{d_1}_{b'_1}\cdots X^{d_s}_{b'_s}A^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s}\right)\left(X^{e_1}_{a'_1}\cdots X^{e_r}_{a'_r}X^{b'_1}_{f_1}\cdots X^{b'_s}_{f_s}\boldsymbol{e}^{f_1\cdots f_s}_{e_1\cdots e_r}\right)\\
&= \left(X^{a'_1}_{c_1}X^{e_1}_{a'_1}\right)\cdots\left(X^{a'_r}_{c_r}X^{e_r}_{a'_r}\right)\cdot\left(X^{d_1}_{b'_1}X^{b'_1}_{f_1}\right)\cdots\left(X^{d_s}_{b'_s}X^{b'_s}_{f_s}\right)\ A^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s}\boldsymbol{e}^{f_1\cdots f_s}_{e_1\cdots e_r}\\
&= \delta^{e_1}_{c_1}\cdots\delta^{e_r}_{c_r}\cdot\delta^{d_1}_{f_1}\cdots\delta^{d_s}_{f_s}\ A^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s}\boldsymbol{e}^{f_1\cdots f_s}_{e_1\cdots e_r} = A^{c_1\cdots c_r}_{d_1\cdots d_s}\boldsymbol{e}^{d_1\cdots d_s}_{c_1\cdots c_r} = A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\ \boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r}
\end{aligned}
$$

∴ $\boldsymbol{A} = A^{a_1\cdots a_r}_{b_1\cdots b_s}\ \boldsymbol{e}^{b_1\cdots b_s}_{a_1\cdots a_r} = A^{a'_1\cdots a'_r}_{b'_1\cdots b'_s}\ \boldsymbol{e}^{b'_1\cdots b'_s}_{a'_1\cdots a'_r}$ ： **テンソルの座標独立性**

(d) 計量関数の変換則　※ 計量（線素）に座標独立性を要請する。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{cd}(x)\,dx^c dx^d = g_{cd}(x)\left(\frac{\partial x^c(x')}{\partial x^{a'}}dx^{a'}\right)\left(\frac{\partial x^d(x')}{\partial x^{b'}}dx^{b'}\right) = X^c_{a'}X^d_{b'}g_{cd}(x)\,dx^{a'}dx^{b'}\\
&= g_{a'b'}(x')\,dx^{a'}dx^{b'} \quad \text{in} \quad (x') \qquad \therefore\ g_{a'b'}(x') = X^c_{a'}X^d_{b'}g_{cd}(x) \quad : \quad (\mathbf{0},\mathbf{2})\ \text{型テンソルの成分と同じ変換則}
\end{aligned}
$$

定義 **計量テンソル** $\boldsymbol{g} \equiv g_{ab}(x)\,\boldsymbol{e}^{ab}$ ： $(\mathbf{0},\mathbf{2})$ 型 $\to$ $\vec{u}\cdot\vec{v} \equiv \boldsymbol{g}(\vec{u},\vec{v}) = g_{ab}u^a v^b = g_{a'b'}u^{a'}v^{b'}$ ： **不変内積**