〔弱い重力場での一般相対論の検証〕

1. 測地線方程式と軌道方程式　※ $r_g = \dfrac{2GM}{c^2} \approx 3\mathrm{km}\dfrac{M}{M_\odot}$, $M_\odot \approx 2\times 10^{30}\mathrm{kg}$は太陽質量

(a) シュバルツシルト計量 ： $ds^2 = -\left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2$

(b) 赤道面上（$\theta = \pi/2$）での測地線の保存量 (k, h)　※ $\dot{}$ はアフィン・パラメータ λ での微分

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{r_g}{r}\right)\dot{t} = k,\quad r^2\dot{\phi} = h,\quad \dfrac{1}{2}\dot{r}^2 + V_g(r) = \dfrac{c^2}{2}\left(k^2-\epsilon_g\right),\quad \epsilon_g = \begin{cases} 1 & \text{粒子（}\lambda\text{ は固有時 }\tau\text{）} \\ 0 & \text{光線（}\lambda\text{ は未定）} \end{cases} \\ V_g(r) = -\epsilon_g\dfrac{GM}{r} + \dfrac{h^2}{2r^2} - \dfrac{GMh^2}{c^2r^3} \quad \text{※ 有効ポテンシャル} \\ \quad = \left(\dfrac{GM}{h}\right)^2\left\{-\epsilon_g\left(\dfrac{h^2}{GMr}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h^2}{GMr}\right)^2 - \left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2\left(\dfrac{h^2}{GMr}\right)^3\right\} \\ \quad = \left(\dfrac{GM}{h}\right)^2\left(-\epsilon_g u + \dfrac{1}{2}u^2 - \alpha u^3\right) \quad \text{※ } a_N = \dfrac{h^2}{GM}\text{ として } u = \dfrac{a_N}{r} = \dfrac{h^2}{GMr},\ \alpha = \left(\dfrac{GM}{hc}\right)^2 = \dfrac{r_g}{2a_N} \\ \quad = \left(\dfrac{GM}{h}\right)^2 U_g(u) \quad \text{※ } U_g(u) = -\epsilon_g u + \dfrac{1}{2}u^2 - \alpha u^3 \end{cases}$$

(c) 軌道方程式：$h \neq 0$ のとき　※ 一般性を失わずに $h > 0$ ($\dot{\phi} > 0$) とできる。

・$\dfrac{\dot{r}}{h} = \dfrac{\dfrac{dr}{d\lambda}}{r^2\dfrac{d\phi}{d\lambda}} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\phi} = -\dfrac{d}{d\phi}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{a_N}\dfrac{d}{d\phi}\dfrac{a_N}{r}$　$\therefore\ \dot{r}^2 = \left(\dfrac{h}{a_N}\right)^2\left(\dfrac{d}{d\phi}\dfrac{a_N}{r}\right)^2 = \left(\dfrac{GM}{h}\right)^2\left(\dfrac{du}{d\phi}\right)^2$　(†)

※ (†) と (b) の結果より，次の軌道方程式が得られる。

≪軌道方程式≫

$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du}{d\phi}\right)^2 - \epsilon_g u + \dfrac{1}{2}u^2 - \alpha u^3 = \mathcal{E}_g & (1) \quad \text{※ } \mathcal{E}_g = \dfrac{1}{2}(k^2-\epsilon_g)\left(\dfrac{hc}{GM}\right)^2 \\ \cdot\ \dfrac{d^2u}{d\phi^2} - \epsilon_g + u - 3\alpha u^2 = 0 & (2) \quad \text{※ 方程式 (1) の } \phi \text{ 微分} \end{cases}$$

(d) ニュートン極限：$r_N = \lim_{\alpha\to 0} r = \dfrac{a_N}{u_N}$,　$u_N = \lim_{\alpha\to 0} u = \dfrac{a_N}{r_N}$,　$\mathcal{E}_N = \lim_{\alpha\to 0}\mathcal{E}_g$

≪軌道方程式≫

$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du_N}{d\phi}\right)^2 - \epsilon_g u_N + \dfrac{1}{2}{u_N}^2 = \mathcal{E}_N & (1)' \quad \text{※ 方程式 (1) の } \alpha\to 0 \text{ 極限} \\ \cdot\ \dfrac{d^2u_N}{d\phi^2} - \epsilon_g + u_N = 0 & (2)' \quad \text{※ 方程式 } (1)' \text{ の } \phi \text{ 微分} \end{cases}$$

・$(2)'$ の一般解：$\dfrac{a_N}{r_N} = u_N = \epsilon_g + \mathrm{e}_N\sin(\phi+\phi_0)$　※ e_Nとϕ_0は積分定数，$(1)'$より $\mathcal{E}_N = \dfrac{1}{2}\left({e_N}^2 - {\epsilon_g}^2\right)$

※ 粒子（$\epsilon_g = 1$）：e_N と a_N はそれぞれ，離心率と円軌道半径。なお，ϕ_0 を $\dfrac{\pi}{2}$ に選ぶと，$\phi = 0$ が近日点。

※ 光線（$\epsilon_g = 0$）：一般性を失わずに $\phi_0 = 0$ とする。このとき，$r_0 = \dfrac{a_N}{e_N} > 0$ として，$r_N = \dfrac{r_0}{\sin\phi}$（直線軌道）。

2. 水星の近日点移動　※ 太陽と水星をそれぞれ，重力源と測地線運動をする粒子と見なし，近似計算をする。

≪水星の軌道≫　※ 水星の軌道パラメータの観測値： 楕円軌道の式 $r_N = \dfrac{a_N}{1+e_N\cos\phi}$, $0 < e_N < 1$

$$\begin{cases} \cdot\ \text{離心率 ： } e_N = 0.2056\ (\ {e_N}^2 \sim 0.0.4 \ll 1\ ) \qquad \cdot\ \text{公転周期 ： } T_N = 0.2408\text{ 年} \\ \cdot\ \text{近日点距離 ： } a_1 = \dfrac{a_N}{1+e_N} = 4.60\times 10^7\mathrm{km} \qquad \cdot\ \text{遠日点距離 ： } a_2 = \dfrac{a_N}{1-e_N} = 6.98\times 10^7\mathrm{km} \\ \cdot\ a_N = \dfrac{h^2}{GM_\odot}\text{ より，} \alpha = \left(\dfrac{GM_\odot}{hc}\right)^2 = \dfrac{GM_\odot}{a_Nc^2} = \dfrac{GM_\odot c^{-2}}{(1+e_N)a_1} = \dfrac{1.48\mathrm{km}}{1.2056\times(4.60\times 10^7\mathrm{km})} = 2.67\times 10^{-8} \end{cases}$$

※ 軌道方程式 (2) に対し，ニュートン力学での楕円軌道解 $u_N = 1 + e_N \cos\phi$ を変形した次の近似解を仮定する。

≪近似解≫　　$u = A_0 + A_1\cos(\omega\phi)$　※ ここで $|A_0 - 1|$, $|A_1 - e_N|$, および $|\omega - 1|$ は $\mathcal{O}(\alpha)$ の微小量

この近似解を粒子（$\epsilon_g = 1$）の場合の軌道方程式 (2) に代入し，整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2u}{d\phi^2} - \epsilon_g + u - 3\alpha u^2 \quad (2) \ : \ \epsilon_g = 1 \text{ として，近似解を代入する。} \\
&= -\omega^2 A_1\cos(\omega\phi) - 1 + A_0 + A_1\cos(\omega\phi) - 3\alpha\left(A_0 + A_1\cos(\omega\phi)\right)^2 \ : \ \cos(\omega\phi) \text{ のベキで整理する。} \\
&= \left(-1 + A_0 - 3\alpha {A_0}^2\right) + \left(-\omega^2 + 1 - 6\alpha A_0\right) A_1\cos(\omega\phi) - 3\alpha {A_1}^2\cos^2(\omega\phi)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{cases}
0 = -1 + A_0 - 3\alpha {A_0}^2 = -1 + A_0 - 3\alpha\left(1 + \mathcal{O}(\alpha)\right)^2 & \rightarrow \ A_0 \approx 1 + 3\alpha \\
0 = -\omega^2 + 1 - 6\alpha A_0 = -\omega^2 + 1 - 6\alpha\left(1 + \mathcal{O}(\alpha)\right) & \rightarrow \ \omega \approx \sqrt{1 - 6\alpha} \approx 1 - 3\alpha \approx (1 + 3\alpha)^{-1} \\
\alpha {A_1}^2 = \alpha\left(e_N + \mathcal{O}(\alpha)\right)^2 \sim 0.04\alpha \ll \alpha & \rightarrow \ \alpha {A_1}^2 \text{を無視する精度で計算する。}
\end{cases}$$

≪水星の近日点移動≫　・ 観測値 : $\Delta\phi_{100\,\text{年}} = 43$ 秒角　・ 相対論補正のパラメータ : $\alpha = 2.67 \times 10^{-8}$

・ 近日点 : r が最小 $\Longleftrightarrow$ u が最大　$\therefore \cos\omega\phi = 1 \ \longrightarrow \ \phi = 0, \ \pm\dfrac{2\pi}{\omega}, \ \pm\dfrac{4\pi}{\omega}, \ \cdots$

$$\therefore \text{ 近日点移動 } \begin{cases}
\Delta\phi_{1\,\text{周}} = \dfrac{2\pi}{\omega} - 2\pi \approx 2\pi(1 + 3\alpha) - 2\pi = 6\pi\alpha\,(\text{ラジアン}) = 0.104 \text{ 秒角} & : 1 \text{ 周期あたり} \\
\Delta\phi_{100\,\text{年}} = \dfrac{100\,\text{年}}{T_N\,[\text{年}]} \times \Delta\phi_{1\,\text{周}} = \dfrac{100\,\text{年}}{0.241\,\text{年}} \times 0.104 \text{ 秒角} = 43 \text{ 秒角} & : 100 \text{ 年あたり}
\end{cases}$$

3. 光線軌道

※ 弱い重力場中において $r \to \infty$ $(u = 0)$ から入射し，$r \to \infty$ $(u = 0)$ へ散乱する光線の軌道

光線軌道では a_N に物理的な意味がないので，軌道方程式 (1) を $\tilde{u} = \dfrac{r_0}{r} = \dfrac{r_0}{a_N} u$ で書き直す。

$$1 = \left(\frac{d\tilde{u}}{d\phi}\right)^2 + \tilde{u}^2 - \frac{r_g}{r_0}\tilde{u}^3 \quad \text{※ ここでは，} \frac{2\mathcal{E}_g {r_0}^2}{{a_N}^2} = 1 \text{ となるように正定数 } r_0 \text{を決めた。} \qquad (3)$$

ニュートン極限（$r_g = 0$）では直線軌道 $r_N = \dfrac{r_0}{\sin\phi}$ となり，座標原点への最接近距離は r_0 である。このため，r_0 を『衝突パラメータ』という。　※ 太陽表面付近を通過する光線では，$r_0 \sim R_\odot \approx 7 \times 10^5$km

≪近似解≫　　$\tilde{u} = \sin\phi + \dfrac{r_g}{r_0}\tilde{v}$ として方程式 (3) に代入し，微小量 $\dfrac{r_g}{r_0}$ について 1 次の項まで残す。

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\cos\phi + \frac{r_g}{r_0}\frac{d\tilde{v}}{d\phi}\right)^2 + \left(\sin\phi + \frac{r_g}{r_0}\tilde{v}\right)^2 - \frac{r_g}{r_0}\left(\sin\phi + \frac{r_g}{r_0}\tilde{v}\right)^3 \\
&= \left(\underline{\cos^2\phi} + 2\frac{r_g}{r_0}\frac{d\tilde{v}}{d\phi}\cos\phi\right) + \left(\underline{\sin^2\phi} + 2\frac{r_g}{r_0}\tilde{v}\sin\phi\right) - \frac{r_g}{r_0}\sin^3\phi + \mathcal{O}\left(\frac{{r_g}^2}{{r_0}^2}\right) \quad \text{※ } \underline{\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1}
\end{aligned}$$

$$\therefore 0 = 2\frac{d\tilde{v}}{d\phi}\cos\phi + 2\tilde{v}\sin\phi - \underline{\sin^3\phi} = \cos^2\phi\,\frac{d}{d\phi}\left(\frac{2\tilde{v}}{\cos\phi} - \frac{1}{\cos\phi} - \cos\phi\right) \quad \text{※ } \underline{\sin^3\phi = (1 - \cos^2\phi)\sin\phi}$$

ここで，解の＜積分定数＞を $(\tilde{v})_{\phi=0} = 0$，すなわち入射角が $\phi = 0$ となるように決める。

$$\therefore \frac{2\tilde{v}}{\cos\phi} - \frac{1}{\cos\phi} - \cos\phi = \text{＜積分定数＞} = -2 \ \longrightarrow \ \tilde{v} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\phi)^2$$

≪光線軌道の曲がり角≫　$\delta\phi$ を正の微小量として，散乱角を $\phi = \pi + \delta\phi$ とする。　※ $(\tilde{u})_{\phi=0} = (\tilde{u})_{\phi=\pi+\delta\phi} = 0$

$$\begin{aligned}
0 = (\tilde{u})_{\phi=\pi+\delta\phi} &= \sin(\pi + \delta\phi) + \frac{r_g}{2r_0}\Big\{1 - \cos(\pi + \delta\phi)\Big\}^2 = -\sin(\delta\phi) + \frac{r_g}{2r_0}\Big\{1 + \cos(\delta\phi)\Big\}^2 \\
&\approx -\delta\phi + \frac{r_g}{2r_0}\big(1 + 1\big)^2 + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \qquad \therefore \ \delta\phi = \frac{2r_g}{r_0} = \frac{4GM}{r_0c^2} \ \longrightarrow \ (\delta\phi)_\odot \equiv \frac{4GM_\odot}{R_\odot c^2} \approx 1.75 \text{ 秒角}
\end{aligned}$$