〔クルスカル (Kruskal) 座標〕　※ シュバルツシルト時空の極大拡張

1. シュバルツシルト (Schwarzschild) 座標　※ 座標 (t, r, θ, ϕ) をシュバルツシルト座標という。

(a) 計量　※ シュバルツシルト半径（重力半径） $r_g \equiv \dfrac{2GM}{c^2} : c \approx 3\times10^8\mathrm{m\cdot s^{-1}},\ G \approx 6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}}$

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$ ※ r の定義域を $r_g < r < \infty$ とする。

※ $M = M_\odot \approx 2\times10^{30}\mathrm{kg}$（太陽質量）$\to (r_g)_\odot = \dfrac{2GM_\odot}{c^2} \approx 3\mathrm{km} \ll R_\odot \approx 7\times10^5\mathrm{km}$（太陽半径）

(b) ヌル (Null) 座標 (u, v)　※ ドイツ語での Null は『零』を表す。

計量の時間部分と動径部分を，次のように因数分解する。 ※ $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2$

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\underline{\left\{c\,dt - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr\right\}}\ \underline{\underline{\left\{c\,dt + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr\right\}}} + r^2d\Omega^2$$

$$= -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\underline{du}\ \underline{\underline{dv}} + r^2d\Omega^2$$（等号部分は各自，要確認） ※ $\begin{cases} u \equiv ct - r - r_g\log\dfrac{|r-r_g|}{r_g} \\ v \equiv ct + r + r_g\log\dfrac{|r-r_g|}{r_g} \end{cases}$

※ (u, v) で表した計量では $g_{uu} = g_{vv} = 0$ となるため，u 方向の長さと v 方向の長さが共に $\underline{\underline{0\,(\mathrm{Null})}}$ になる。

2. クルスカル座標　※ 以下のように定義される (T, R) と (U, V) の両方を，共にクルスカル座標という。

- $R - T \equiv -U \equiv \exp\left(\dfrac{-u}{2r_g}\right) = \exp\left(\dfrac{r-ct}{2r_g}\right)\sqrt{\dfrac{r-r_g}{r_g}}$: $r = r_g$ もしくは $t = +\infty \Longleftrightarrow T = +R$ (直線グラフ)
- $R + T \equiv V \equiv \exp\left(\dfrac{v}{2r_g}\right) = \exp\left(\dfrac{r+ct}{2r_g}\right)\sqrt{\dfrac{r-r_g}{r_g}}$: $r = r_g$ もしくは $t = -\infty \Longleftrightarrow T = -R$ (直線グラフ)

$$\left\{\begin{aligned}
&\cdot\ \frac{R+T}{R-T} = \frac{V}{(-U)} = \exp\left(\frac{v+u}{2r_g}\right) = \exp\left(\frac{ct}{r_g}\right) \quad : t\text{ が一定} \Longleftrightarrow T \propto R\ (\text{直線グラフ}) \\
&\cdot\ R^2 - T^2 = -UV = \exp\left(\frac{v-u}{2r_g}\right) = \frac{r-r_g}{r_g}\exp\left(\frac{r}{r_g}\right) \quad : r\text{ が一定} \Longleftrightarrow R^2-T^2\text{が一定（双曲線グラフ）} \\
&\cdot\ dUdV = \left\{\frac{dU}{du}du\right\}\left\{\frac{dV}{dv}dv\right\} = \left\{\frac{1}{2r_g}\exp\left(\frac{-u}{2r_g}\right)du\right\}\left\{\frac{1}{2r_g}\exp\left(\frac{v}{2r_g}\right)dv\right\} \\
&\qquad = \frac{1}{4\,(r_g)^2}\exp\left(\frac{v-u}{2r_g}\right)dudv \ :\ v - u = 2r_g\left(\frac{r}{r_g} + \log\frac{|r-r_g|}{r_g}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{4(r_g)^2}\exp\left(\frac{r}{r_g}\right)\frac{|r-r_g|}{r_g}dudv \ :\ r_g < r < \infty\text{ の場合，}\frac{|r-r_g|}{r_g} = \frac{r-r_g}{r_g} = \frac{r}{r_g}\left(1-\frac{r_g}{r}\right) \\
&\qquad = \frac{r}{4(r_g)^3}\exp\left(\frac{r}{r_g}\right)\underline{\underline{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dudv}}
\end{aligned}\right.$$

$\underline{\underline{\text{計量}}}$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 && : \text{シュバルツシルト座標 } (t, r) \\
&= -\underline{\underline{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dudv}} + r^2d\Omega^2 && : \text{ヌル座標 } (u, v) \\
&= -\frac{4\,(r_g)^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_g}\right)dUdV + r^2d\Omega^2 && : \text{クルスカル座標 } (U, V) \\
&= \frac{4\,(r_g)^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_g}\right)\left(-dT^2 + dR^2\right) + r^2d\Omega^2 && : \text{クルスカル座標 } (T, R)
\end{aligned}$$

- クルスカル座標では，計量の $r = r_g$ での特異性が消失する。∴ r の値域を $0 < r < \infty$ に拡張する。
- $UV = \dfrac{r_g - r}{r_g}\exp\left(\dfrac{r}{r_g}\right)$ より，全時空領域 $0 < r < \infty$ は $-\infty < UV < +1$ を満たす (U, V) で覆われる。