〔アインシュタイン方程式〕

1.　リーマン曲率の性質　※ $R^a{}_{bcd} \equiv \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed} = -R^a{}_{bdc}$，$R_{abcd} \equiv g_{ae} R^e{}_{bcd}$

(a)　リーマン曲率の独立成分の数　※ n 次元の場合，各添字は $1 \sim n$ の n 通りの値をとる。

$$\begin{cases} \cdot\ R_{abcd} = -R_{abdc} & : \text{任意の接続係数 } \Gamma^a_{bc} \text{ について成立} \\ \cdot\ R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0 \ (\text{第 1 恒等式}) & : \text{接続係数が対称性 } \Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} \text{ をもつとき成立} \\ \cdot\ R_{abcd} = -R_{bacd} & : \Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba} = \dfrac{1}{2} g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \text{ のとき成立} \end{cases}$$

<u>公式</u>　R_{abcd} は添字対の役割交換 $(a,b) \leftrightarrow (c,d)$ に対する対称性 $R_{abcd} = R_{cdab}$ をもつ。

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{acdb} - R_{adbc} && : \text{第 1 恒等式} \\ &= R_{cadb} + R_{dabc} && : \text{リーマン曲率の反対称性} \\ &= R_{cadb} + (-R_{dbca} - R_{dcab}) && : \text{第 1 恒等式} \\ &= R_{cadb} - R_{dbca} + R_{cdab} && : \text{リーマン曲率の反対称性} \\ &\downarrow \\ R_{badc} &= R_{dbca} - R_{cadb} + R_{dcba} && : \text{添字の役割交換（ } a \leftrightarrow b \text{ かつ } c \leftrightarrow d \text{ ）} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ R_{abcd} &= \frac{1}{2}(R_{abcd} + R_{badc}) && : R_{abcd} = -R_{abdc} = -(-R_{badc}) = R_{badc} \\ &= \frac{1}{2}\Big((\underline{R_{cadb}} - \underline{\underline{R_{dbca}}} + R_{cdab}) \ + \ (\underline{\underline{R_{dbca}}} - \underline{R_{cadb}} + R_{dcba}) \Big) \\ &= \frac{1}{2}(R_{cdab} + R_{dcba}) && : R_{dcba} = -R_{dcab} = -(-R_{cdab}) = R_{cdab} \\ &= \frac{1}{2}(R_{cdab} + R_{cdab}) = R_{cdab} \end{aligned}$$

(i) R_{abcd} の反対称性 $R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}$ による制約

・ (a,b) の場合の数：
$$\begin{cases} a < b \text{ のとき } : {}_nC_2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{1}{2}n(n-1) \\ a = b \text{ のとき } : a \leftrightarrow b \text{ 反対称性より，} R_{abcd} = 0 \\ a > b \text{ のとき } : \text{例えば } R_{21cd} = -R_{12cd} \text{ のように，} a < b \text{ のときの } R_{abcd} \text{ で表される。} \end{cases}$$

・ (c,d) の場合の数 $=$ (a,b) の場合の数　∴ (a,b) と (c,d) の組み合わせの数 $\mathcal{A}_n$ は，$\mathcal{A}_n = \dfrac{1}{4}n^2(n-1)^2$

(ii) 第 1 恒等式 $R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$ による制約

・ 第 1 恒等式のサイクリックな添字 (b,c,d) に関する反対称性がある。

例えば $c = d = 1$ のとき，$R_{ab11} + R_{a11b} + R_{a1b1} = 0 + (-R_{a1b1}) + R_{a1b1} = 0$　（無条件で成立）

∴ (b,c,d) の場合の数 $\mathcal{B}_n$ は $b < c < d$ となる場合の数 ： $\mathcal{B}_n = {}_nC_3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = \dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

・ 添字 a はサイクリックな添字 (b,c,d) とは独立に，$1 \sim n$ の n 通りの値をとる。

∴ 第 1 恒等式による R_{abcd} への条件式の数 $\mathcal{C}_n$ は，$\mathcal{C}_n = n \times \mathcal{B}_n = \dfrac{1}{6}n^2(n-1)(n-2)$

(iii) R_{abcd} の独立成分の数 $\mathcal{N}_n$ は，添字 (a,b,c,d) の場合の数 $\mathcal{A}_n$ と第 1 恒等式による条件式の数 $\mathcal{C}_n$ との差

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n = \mathcal{A}_n - \mathcal{C}_n &= \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 - \frac{1}{6}n^2(n-1)(n-2) = \frac{1}{12}n^2(n-1)\Big(3(n-1) - 2(n-2)\Big) \\ &= \frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1) = \frac{1}{12}n^2(n^2-1) \qquad \therefore\ \mathcal{N}_1 = 0,\ \mathcal{N}_2 = 1,\ \mathcal{N}_3 = 6,\ \mathcal{N}_4 = 20,\ \mathcal{N}_5 = 50,\ \cdots \end{aligned}$$

(iv) アインシュタイン方程式へのヒント　※ $R_{ab} \equiv R^c{}_{acb}$ はリッチ・テンソル　$(R_{ab} = R_{ba})$

・ 計量関数の対称性 $g_{ab} = g_{ba}$ より，g_{ab} の独立成分の数 $\mathcal{K}_n$ は $a \leq b$ となる場合の数　∴ $\mathcal{K}_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

・ $\mathcal{N}_4 = 20 > \mathcal{K}_4 = 10$　※ g_{ab} の独立成分の数に対してリーマン曲率の独立成分の数は多すぎる。

∴ $R_{ab} = R_{ba}$ より，$R_{ab} + \alpha R g_{ab} = k T_{ab}$ の形を想定する。　※ $\begin{cases} \alpha \text{ と } k \text{ は適当な定数} \\ T^{ab} = T^{ba} \text{ は物質を表す対称テンソル} \end{cases}$

(b) 第２恒等式の縮約とアインシュタイン･テンソル　※ 添字の上げ下げ : $g^{ab}S_{bc} = S^a{}_c$, $P^{ab}Q_{bc} = P^a{}_b Q^b{}_c$, etc.

・微分を含む縮約表記の例 ： $\nabla_a R^{ab} = \nabla_a(g^{ac} \cdot R_c{}^b) = \underline{\underline{(\nabla_a g^{ac})}} \cdot R_c{}^b + g^{ac} \cdot \nabla_a R_c{}^b = \underline{\underline{0}} + g^{ac} \cdot \nabla_a R_c{}^b$

$= g^{ac}\nabla_a R_c{}^b \equiv \nabla^c R_c{}^b$　　$\therefore\ \nabla_a R^{ab} = \nabla^a R_a{}^b = g_{ac}\nabla^a R^{cb} = g^{ac}\nabla_a R_c{}^b$

・ 第２恒等式の縮約

$0 = \nabla_e R^a{}_{bcd} + \nabla_c R^a{}_{bde} + \nabla_d R^a{}_{bec}$　　： 第２恒等式

↓ 添字対 (a, e) の縮約

$0 = \nabla_a R^a{}_{bcd} + \nabla_c R^a{}_{bda} + \nabla_d R^a{}_{bac} = \nabla^a R_{abcd} + \nabla_c R^a{}_{bda} + \nabla_d R^a{}_{bac}$ ： 縮約する添字の上げ下げ

$= -\nabla^a R_{bacd} - \nabla_c R^a{}_{bad} + \nabla_d R^a{}_{bac}$ ： リーマン曲率の反対称性

$= -\nabla^a R_{bacd} - \nabla_c R_{bd} + \nabla_d R_{bc}$ ： リッチ・テンソルの定義（$R_{bd} \equiv R^a{}_{bad} = -R^a{}_{bda}$）

↓ 添字対 (b, c) の縮約

$0 = g^{bc}(-\nabla^a R_{bacd} - \nabla_c R_{bd} + \nabla_d R_{bc}) = -\nabla^a R^c{}_{acd} - \nabla^b R_{bd} + \nabla_d R^c{}_c$

$= -\nabla^a R_{ad} - \nabla^b R_{bd} + \nabla_d R$ ： リッチ・テンソルとリッチ・スカラーの定義（$R \equiv g^{bc}R_{bc} = R^c{}_c$）

$= -\nabla^a R_{ad} - \nabla^a R_{ad} + \delta^b_d \nabla_b R = -2\nabla^a R_{ad} + g^{ba}g_{ad}\nabla_b R = -2\nabla^a R_{ad} + g^{ba}\nabla_b(g_{ad}R)$

$= -2\nabla^a R_{ad} + \nabla^a(g_{ad}R) = -2\nabla^a\left(R_{ad} - \dfrac{R}{2}g_{ad}\right) \equiv -2\nabla^a G_{ad}$,　ここで $G_{ad} \equiv R_{ad} - \dfrac{R}{2}g_{ad}$

<u>**定義**</u>　**アインシュタイン・テンソル** ： $G^{ab} \equiv R^{ab} - \dfrac{R}{2}g^{ab} = G^{ba}\ \rightarrow\ \nabla_b G^{ab} = \nabla_b G^{ba} = 0$（微分恒等式）

※ **微分恒等式の役割** : 任意の着目点 p について $\Gamma^a_{bc}(p) = 0$ となる座標系を選ぶとき，$(\nabla_b G^{ab})_p = (\partial_b G^{ab})_p = 0$ となる。したがって，**重力場の方程式（アインシュタイン方程式）**の形が $G^{ab} \equiv R^{ab} - \dfrac{R}{2}g^{ab} = kT^{ab}$ であるならば，以下の（物質についての）**エネルギーと運動量の（局所的な）保存則** $(\partial_b T^{ab})_p = 0$ と両立する。

2. 物質のエネルギー・運動量テンソル T^{ab}

※ 真空中の光の速さを c として，$x^0 \equiv ct$　　$\therefore\ \partial_0 = \dfrac{\partial}{c\partial t}$

(a) 特殊相対論でのエネルギー・運動量テンソル

<u>**定義**</u> 慣性座標系 (x) におけるエネルギー・運動量テンソルの各成分を次のように定義する。

・$T^{00} = \varepsilon = \rho c^2$	： 単位体積あたりの**エネルギー密度** ε
（※ $\rho \equiv \varepsilon c^{-2}$）	： 静止エネルギーの式 $E = mc^2$ より，ρ を**質量密度**という。
・T^{i0} $(i = 1 \sim 3)$	： 単位体積あたりの**運動量密度** $\times c$
（※ 運動量の x^i成分）	： $(T^{10}c^{-1}, T^{20}c^{-1}, T^{30}c^{-1})$ は**運動量密度ベクトル**（空間ベクトル）
・T^{0k} $(k = 1 \sim 3)$	： 単位時間に単位面積を通過するエネルギー $\times c^{-1}$
（※ x^k方向への流れ）	： $T^{0k}c$ を**エネルギー流束**という。
・T^{ik} $(i = 1 \sim 3,\ k = 1 \sim 3)$	： 単位時間に単位面積を通過する運動量
（※ x^k方向への流れ）	： T^{ik} を**運動量流束**という。

※ T^{ab} の各成分は，**エネルギー密度の次元**をもつように定義される。

<u>**定理**</u> エネルギーと運動量の生成・消滅がないとき，次の**連続の式**が成り立つ。

$$\partial_b T^{ab} = \frac{\partial T^{a0}}{c\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T^{ak}}{\partial x^k} = 0 \qquad (a = 0 \sim 3)$$

・ エネルギー保存則の証明（$a = 0$）　　※ 運動量保存則の証明（$a = 1 \sim 3$）も同様

いま，$\partial_b T^{0b} = 0$ とする。体積領域 V にある全エネルギー $E(t)$ は，体積分 $E(t) = \int_V T^{00}dV$ である。

$$\therefore\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V T^{00}dV = \int_V \frac{\partial T^{00}}{\partial t}dV = c\int_V \frac{\partial T^{00}}{c\partial t}dV = \int_V -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial(T^{0k}c)}{\partial x^k}dV = -\int_S \sum_{k=1}^{3}(T^{0k}c)n_k dS$$

最後の等号でガウスの定理（発散定理）を用いた。ここで閉曲面 S は V の表面であり，n_k は S の外向きの単位法線ベクトルである。$\int_S \sum_{k=1}^{3}(T^{0k}c)n_k dS$ は単位時間あたり表面 S を通じて V の外へ流出するエネルギーの総量なので，上記の式はエネルギー保存則を表す。

(b) 非相対論的極限（Non-Relativistic Limit=NRL）

ここでは物質に付随する速さが光の速さ c に比べて十分遅い状況を考える。

- **物質が移動する速さ $\sim \boldsymbol{v}$**

$$\frac{T^{i0}c}{T^{00}} \equiv \frac{\text{運動量の体積密度（}\rho v\text{ 程度）} \times c^2}{\text{エネルギーの体積密度}\varepsilon} \quad : \ E = mc^2\text{より},\ \varepsilon = \rho c^2$$
$$\sim \frac{\text{運動量の体積密度（}\rho v\text{ 程度）} \times c^2}{\text{質量の体積密度}\rho \times c^2} \sim v\ \text{（物質の平均速度程度の大きさ）}$$

- **エネルギーおよび運動量の流れの速さ $\sim \boldsymbol{u}$**

$$\begin{cases} \dfrac{T^{0k}c}{T^{00}} \equiv \dfrac{\text{単位時間に単位面積を通過するエネルギー}}{\text{エネルギーの体積密度}} \sim u \\[2ex] \dfrac{T^{ik}}{T^{i0}c^{-1}} \equiv \dfrac{\text{単位時間に単位面積を通過する運動量（}i\text{ 成分）}}{\text{運動量（}i\text{ 成分）の体積密度}} \sim u \end{cases}$$

- **非相対論的極限（NRL）** ： $\dfrac{T^{i0}}{T^{00}} \sim \dfrac{v}{c} \to 0 \qquad \dfrac{T^{0k}}{T^{00}} \sim \dfrac{u}{c} \to 0 \qquad \dfrac{T^{ik}}{T^{00}} = \dfrac{T^{ik}}{T^{i0}}\dfrac{T^{i0}}{T^{00}} \sim \dfrac{uv}{c^2} \to 0$

$$\therefore \ \left(T^{ab}\right)_{NRL} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **計量**：遅い運動の状態が保たれるためには，重力加速度が小さいことが必要 $\to g_{ab} \approx \eta_{ab}$ とする。

$$\therefore \ \begin{cases} \left(T^a{}_a\right)_{NRL} = \eta_{ab}\left(T^{ab}\right)_{NRL} = \eta_{00} \times \left(T^{00}\right)_{NRL} = (-1) \times \varepsilon = -\varepsilon = -\rho c^2 \\[1ex] \left(T^{00} - \dfrac{1}{2}T^a{}_a g^{00}\right)_{NRL} = \left(T^{00}\right)_{NRL} - \dfrac{1}{2} \times \left(T^a{}_a\right)_{NRL} \times \eta^{00} = \rho c^2 - \dfrac{1}{2} \times (-\rho c^2) \times (-1) = \dfrac{1}{2}\rho c^2 \\[1ex] \left(T_{00} - \dfrac{1}{2}T^a{}_a g_{00}\right)_{NRL} = \eta_{0c}\eta_{0d}\left(T^{cd} - \dfrac{1}{2}T^a{}_a g^{cd}\right)_{NRL} = \eta_{00}\eta_{00}\left(T^{00} - \dfrac{1}{2}T^a{}_a g^{00}\right)_{NRL} = \dfrac{1}{2}\rho c^2 \end{cases}$$

3. ニュートン近似

(a) ニュートン的計量 ※ $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

$$\begin{cases} ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = -\left(1 + \dfrac{2}{c^2}\phi_N\right)(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b - \dfrac{2}{c^2}\phi_N (dx^0)^2 \\ \text{ニュートンポテンシャル}\phi_N\text{は，ポワッソン方程式 } \nabla^2\phi_N = 4\pi G\rho\text{を満たす。} \end{cases}$$

(b) 近似の精度

- ϕ_N の 1 次精度 ： $|\phi_N| \ll c^2 \qquad \therefore \ g_{ab} = \eta_{ab} + \mathcal{O}(\phi_N) \ \to \ g^{ab} = \eta^{ab} + \mathcal{O}(\phi_N)$
- c が十分大きいと考え，x^0 微分は無条件で 0 にする。 $\qquad \therefore \ \partial_0 g_{ab} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial g_{ab}}{\partial t} \to 0$

(c) 接続係数

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \sim \frac{1}{2}g^{cd}\mathcal{O}(\partial_d g_{ab}) \sim \frac{1}{2}g^{cd}\mathcal{O}(\phi_N)$$

$$\therefore \ \Gamma^c_{ab} \approx \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$$

公式（$\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$）
$$\Gamma^i_{00} \approx \sum_{d=0}^{3}\frac{1}{2}\eta^{id}(\partial_0 g_{0d} + \partial_0 g_{0d} - \partial_d g_{00}) \approx -\frac{1}{2}\sum_{d=0}^{3}\delta^{id}\partial_d g_{00}$$
$$= -\frac{1}{2}\partial_i g_{00} \quad : \quad g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2}\phi_N$$
$$= -\frac{1}{2}\partial_i\left(-1 - \frac{2}{c^2}\phi_N\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_N}{\partial x^i} \quad : \quad \phi_N\text{の 1 次精度近似}$$

(d)　リッチ・テンソル

$$R_{bd} = \partial_a \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{ba} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ea} - \Gamma^e_{ba}\Gamma^a_{ed} \quad : \quad \Gamma^c_{ab} \sim \mathcal{O}(\phi_N)$$
$$\approx \partial_a \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^c_{bc}$$

公式　$R_{00} \approx \partial_a \Gamma^a_{00} - \partial_0 \Gamma^c_{0c} \approx \sum_{i=1}^{3} \partial_i \Gamma^i_{00}$　:　x^0微分は無条件で 0

$$\approx \sum_{i=1}^{3} \partial_i \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_N}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial z^2} \right) \equiv \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi_N$$

$\therefore$　ニュートン近似：$R_{00} \approx \dfrac{1}{c^2} \nabla^2 \phi_N = \dfrac{1}{c^2} \Big(4\pi G \rho \Big) = \dfrac{4\pi G}{c^4} \rho c^2 = \dfrac{4\pi G}{c^4} \varepsilon$

4. アインシュタイン方程式

※　$G_{ab} \equiv R_{ab} - \dfrac{1}{2} R g_{ab} = k T_{ab}$ の形を想定し，ニュートン近似を再現するように未知定数 k を決定する。

・ **アインシュタイン方程式の縮約**

$$g^{ab} R_{ab} - \frac{1}{2} R g^{ab} g_{ab} = k g^{ab} T_{ab} \ : \ g^{ab} g_{ab} = \delta^a_a = 4 \ (4\text{ 次元時空})$$
$$\to \ R - \frac{1}{2} R \times 4 = -R = k {T^a}_a = k {T^c}_c \qquad \therefore \ R = -k {T^c}_c$$

・**変形されたアインシュタイン方程式**　:　$R_{ab} = k \left(T_{ab} - \dfrac{1}{2} {T^c}_c g_{ab} \right)$

・ **ニュートン近似**

$$\begin{cases} R_{00} \approx \dfrac{4\pi G}{c^4} \rho c^2 \\ k \left(T_{00} - \dfrac{1}{2} {T^c}_c g_{00} \right) \approx k \left(T_{00} - \dfrac{1}{2} {T^c}_c g_{00} \right)_{NRL} = k \times \dfrac{1}{2} \rho c^2 = \dfrac{k}{2} \rho c^2 \end{cases} \qquad \therefore \ \frac{4\pi G}{c^4} = \frac{k}{2} \ \to \ k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

基本仮説　**アインシュタイン方程式** $G_{ab} \equiv R_{ab} - \dfrac{R}{2} g_{ab} = \dfrac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$ **が成り立つ。**

※ T^{ab} については物質場に対する物理法則が必要。また，$T^{ab} = T^{ba}$ と $\nabla_b T^{ab} = 0$ を満たす必要がある。

5. アインシュタイン方程式の解としての定曲率多様体

定義　$\mathcal{K}$ を適当なスカラー定数としてリーマン曲率が次のようになるとき，**定曲率 (*n* 次元) 多様体**という。

$$R_{abcd} = \mathcal{K} \Big(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc} \Big) \qquad ※ \ \nabla_e R_{abcd} = (\nabla_e \mathcal{K}) \Big(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc} \Big) + \mathcal{K} \nabla_e \Big(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc} \Big) = 0$$

・ **リッチ・テンソルとスカラー曲率**　　※　n 次元多様体において $g^{ac} g_{ac} = \delta^a_a = n$ となることを用いる。

$$\begin{cases} R_{bd} = g^{ac} R_{abcd} = \mathcal{K} \Big(g^{ac} g_{ac} g_{bd} - g^{ac} g_{ad} g_{bc} \Big) = \mathcal{K} \Big(\delta^a_a g_{bd} - \delta^c_d g_{bc} \Big) = \mathcal{K} \Big(n g_{bd} - g_{bd} \Big) = (n-1) \mathcal{K} g_{bd} \\ R = g^{bd} R_{bd} = (n-1) \mathcal{K} g^{bd} g_{bd} = (n-1) \mathcal{K} \delta^b_b = n(n-1) \mathcal{K} \end{cases}$$

$\therefore$　$G_{ab} = -\dfrac{1}{2} (n-1)(n-2) \mathcal{K} g_{ab}$　　※　$n = 4$ では，$R_{ab} = 3\mathcal{K} g_{ab}$，$R = 12\mathcal{K}$，$G_{ab} = -3\mathcal{K} g_{ab}$ となる。

・ **アインシュタインの宇宙定数**

定曲率４次元時空について，$T_{ab} = -\dfrac{3\mathcal{K} c^4}{8\pi G} g_{ab}$ をエネルギー・運動量テンソルとするアインシュタイン方程式の特解と考えることができる。このとき，$\Lambda \equiv \dfrac{1}{2} (n-1)(n-2) \mathcal{K} = 3\mathcal{K}$ を**アインシュタインの宇宙定数**という。

・ **定曲率４次元時空の計量**　　※　$\mathcal{K} > 0$ の場合，$r = \sqrt{\mathcal{K}}$ に座標特異点をもつ。

$$ds^2 = -\Big(1 - \mathcal{K} r^2 \Big) c^2 dt^2 + (1 - \mathcal{K} r^2)^{-1} dr^2 + r^2 \Big(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2 \Big) \qquad ※ \ \begin{cases} \mathcal{K} > 0 & \text{ドジッター時空} \\ \mathcal{K} = 0 & \text{ミンコフスキー時空} \\ \mathcal{K} < 0 & \text{反ドジッター時空} \end{cases}$$