〔重力による赤方偏移と青方偏移〕

（1） 状況設定 ※ 空間座標に対して静止状態での座標時間間隔 Δt は，固有時間間隔 $\Delta\tau = \sqrt{|g_{00}|}\,\Delta t$ に対応。

点光源A
- （A１）与えられた計量の空間座標に対して静止している。点光源の動径座標を r_{A} とする。
- （A２）動径方向の観測者に向けて，振動数 f_{A}，波長$\lambda_{\mathrm{A}} = \dfrac{c}{f_{\mathrm{A}}}$の電磁波を送り続ける。
- （A３）座標時刻 t_{A} と $t_{\mathrm{A}} + \Delta t_{\mathrm{A}}$にそれぞれ,（A２）の電磁波に$\delta$関数的な瞬時信号を乗せる。
- （A４）座標時間間隔Δt_{A}に対応する固有時間間隔$\Delta\tau_{\mathrm{A}}$の間に（A２）の電磁波は N 回振動する。

観測者B
- （B１）与えられた計量の空間座標に対して静止している。観測者の動径座標を r_{B} とする。
- （B２）点光源から振動数 f_{B}，波長$\lambda_{\mathrm{B}} = \dfrac{c}{f_{\mathrm{B}}}$の電磁波を受信し続ける。
- （B３）座標時刻 t_{B} と $t_{\mathrm{B}} + \Delta t_{\mathrm{B}}$にそれぞれ，点光源からの$\delta$関数的な瞬時信号（A３）を受信する。
- （B４）座標時間間隔Δt_{B}に対応する固有時間間隔$\Delta\tau_{\mathrm{B}}$の間に（B２）の電磁波は N 回振動する。

※ 基本仮説：光線近似（幾何光学近似）のもとで，電磁波は $ds^2 = 0$（ヌル）に沿って伝わるものとする。

※ 赤方偏移：$1 + z \equiv \dfrac{\lambda_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{A}}} = \dfrac{f_{\mathrm{A}}}{f_{\mathrm{B}}} > 0 \to \begin{cases} -1 < z < 0 & \text{青方偏移（}\lambda_{\mathrm{A}} > \lambda_{\mathrm{B}} \longleftrightarrow f_{\mathrm{A}} < f_{\mathrm{B}}\text{）} \\ 0 < z < \infty & \text{赤方偏移（}\lambda_{\mathrm{A}} < \lambda_{\mathrm{B}} \longleftrightarrow f_{\mathrm{A}} > f_{\mathrm{B}}\text{）} \end{cases}$

（2） シュバルツシルト (Schwarzschild) 計量 ※ $r_g = \dfrac{2GM}{c^2}$ は重力半径（シュバルツシルト半径）

※ $ds^2 = -\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$ ：$r_g < r < \infty$ とする。

$$\left(ds^2\right)_{d\theta = d\phi = 0} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \text{：（A２）動径方向の光線軌道}$$

↓ $dt > 0$ (未来向き)

$$dt = c^{-1}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}|dr| = \varepsilon c^{-1}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr \quad ※\ \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{：外向き}\ (r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}} \longleftrightarrow dr > 0) \\ -1 & \text{：内向き}\ (r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}} \longleftrightarrow dr < 0) \end{cases}$$

※ 上の式を $\dfrac{dt}{dr} = \varepsilon c^{-1}\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)^{-1}$ と書くとき，右辺は t を陽に含まないので，次の式が成り立つ。

$$\int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}} \varepsilon c^{-1}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr = \int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}} \frac{dt}{dr} dr = \int_{r = r_{\mathrm{A}}}^{r = r_{\mathrm{B}}} dt \ \to\ \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} dt = \int_{t_{\mathrm{A}} + \Delta t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}} + \Delta t_{\mathrm{B}}} dt \quad \therefore \Delta t_{\mathrm{A}} = \Delta t_{\mathrm{B}}$$

$$\begin{cases} \text{（A４）より，}\Delta\tau_{\mathrm{A}} = \sqrt{1 - \dfrac{r_g}{r_{\mathrm{A}}}}\,\Delta t_{\mathrm{A}} = \dfrac{N}{f_{\mathrm{A}}} \\ \text{（B４）より，}\Delta\tau_{\mathrm{B}} = \sqrt{1 - \dfrac{r_g}{r_{\mathrm{B}}}}\,\Delta t_{\mathrm{B}} = \dfrac{N}{f_{\mathrm{B}}} \end{cases} \quad \therefore 1 + z = \frac{f_{\mathrm{A}}}{f_{\mathrm{B}}} = \sqrt{\frac{1 - \dfrac{r_g}{r_{\mathrm{B}}}}{1 - \dfrac{r_g}{r_{\mathrm{A}}}}} \quad ※ \begin{cases} r_g < r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}} \to \text{赤方偏移} \\ r_g < r_{\mathrm{B}} < r_{\mathrm{A}} \to \text{青方偏移} \end{cases}$$

（3） ロバートソン・ウォーカー（Robertson・Walker）計量 ※ 一様等方空間（宇宙）モデル

※ $ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2\left\{\dfrac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right\}$ ：$a(t) > 0$ はスケール因子，K は曲率定数。

$$\left(ds^2\right)_{d\theta = d\phi = 0} = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - Kr^2} = 0 \text{：（A２）動径方向の光線軌道}$$

↓ $dt > 0$ (未来向き)

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{c^{-1}|dr|}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \frac{\varepsilon c^{-1} dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad ※\ \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{：外向き}\ (r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}} \longleftrightarrow dr > 0) \\ -1 & \text{：内向き}\ (r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}} \longleftrightarrow dr < 0) \end{cases}$$

※ $\Delta t_{\mathrm{A}} \ll t_{\mathrm{A}}$ かつ $\Delta t_{\mathrm{B}} \ll t_{\mathrm{B}}$ のとき,（2）の場合と同様の考察により，以下のように $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{A}}}{a(t_{\mathrm{A}})} = \dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{a(t_{\mathrm{B}})}$ が得られる。

$$\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{\mathrm{A}} + \Delta t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}} + \Delta t_{\mathrm{B}}} \frac{dt}{a(t)} \to \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{A}} + \Delta t_{\mathrm{A}}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{\mathrm{B}}}^{t_{\mathrm{B}} + \Delta t_{\mathrm{B}}} \frac{dt}{a(t)} \ :\ \int_{t_i}^{t_i + \Delta t_i} \frac{dt}{a(t)} \approx \int_{t_i}^{t_i + \Delta t_i} \frac{dt}{a(t_i)} = \frac{\Delta t_i}{a(t_i)} \quad (i = \mathrm{A}, \mathrm{B})$$

$$\begin{cases} \text{（A４）より，}\Delta\tau_{\mathrm{A}} = \Delta t_{\mathrm{A}} = \dfrac{N}{f_{\mathrm{A}}} \\ \text{（B４）より，}\Delta\tau_{\mathrm{B}} = \Delta t_{\mathrm{B}} = \dfrac{N}{f_{\mathrm{B}}} \end{cases} \quad \therefore 1 + z = \frac{f_{\mathrm{A}}}{f_{\mathrm{B}}} = \frac{a(t_{\mathrm{B}})}{a(t_{\mathrm{A}})} \quad ※ \begin{cases} 0 < a(t_{\mathrm{A}}) < a(t_{\mathrm{B}}) \to \text{赤方偏移} \\ 0 < a(t_{\mathrm{B}}) < a(t_{\mathrm{A}}) \to \text{青方偏移} \end{cases}$$