〔局所慣性系とアインシュタインの等価原理〕 ※ 特殊相対論との関係

（1）テトラードと局所ローレンツ座標　※ 4 次元時空の座標を $(x) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ のように表記する。

- 計量仮説：重力は見かけの力と共に，『ローレンツ的符号をもつ計量 ds^2』で表現される。
- テトラードの導入：計量 ds^2 を dx^a $(a = 0 \sim 3)$ の 2 次形式と見なし，平方完成をおこなう。

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x)\, dx^a dx^b = \sum_{A,B=0}^{3} \eta_{AB} \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = -(\mathrm{e}^0)^2 + (\mathrm{e}^1)^2 + (\mathrm{e}^2)^2 + (\mathrm{e}^3)^2, \quad g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$$

$$※ \begin{cases} \cdot\, (\eta_{AB}) \equiv \mathrm{diag.}(-1, 1, 1, 1) & \text{：計量の符号因子（ローレンツ的）} \\ \cdot\, \mathrm{e}^A \equiv \displaystyle\sum_{a=0}^{3} \mathrm{e}^A{}_a(x)\, dx^a & \text{：平方完成ブロック（テトラード）} \end{cases}$$

- 任意の時空点 p 近傍の『局所ローレンツ座標 $(X) = (X^0, X^1, X^2, X^3)$』を次のように定義する。

$$X^A \equiv \sum_{a=0}^{3} \mathrm{e}^A{}_a(x_p)\, x^a \to (dX^A)_p = \sum_{a=0}^{3} \mathrm{e}^A{}_a(x_p)\, (dx^a)_p = (\mathrm{e}^A)_p$$

$$\therefore\ (ds^2)_p = \sum_{A,B=0}^{3} \eta_{AB} (\mathrm{e}^A)_p (\mathrm{e}^B)_p = \sum_{A,B=0}^{3} \eta_{AB} (dX^A)_p (dX^B)_p \ \to\ \underline{\underline{g_{AB}(X_p) = \eta_{AB}}}$$

（2）計量関数の変換則

- 座標独立性の要請：一般座標変換 $(x) \longleftrightarrow (x')$ に対して計量は不変（$ds^2 = ds'^2$）。

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}(x)\, dx^a dx^b &&\text{：in } (x) \\ &= \sum_{d,e=0}^{3} g_{d'e'}(x')\, dx^{d'} dx^{e'} &&\text{：in } (x') \quad ※\ dx^{d'} = \sum_{a=0}^{3} \frac{\partial x^{d'}(x)}{\partial x^a} dx^a,\ \ dx^{e'} = \sum_{b=0}^{3} \frac{\partial x^{e'}(x)}{\partial x^b} dx^b \\ &= \sum_{a,b=0}^{3} \left(\sum_{d,e=0}^{3} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{e'}}{\partial x^b} g_{d'e'}(x') \right) dx^a dx^b &&\therefore\ g_{ab}(x) = \sum_{d,e=0}^{3} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{e'}}{\partial x^b} g_{d'e'}(x') \end{aligned}$$

※ 座標変換とその逆変換が共に特異でない条件：$\det\left(\dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^b}\right) \neq 0$ と $\det\left(\dfrac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\right) \neq 0$ を要請する。

※ $g_{ab}(x)$ は座標独立ではない。一方，ds^2 は座標独立だが，dx^a は (x) のみで決まる場の量ではない。

$\therefore$ ds^2 の代わりに計量テンソル $\mathbf{g} = \displaystyle\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab} dx^a \otimes dx^b$ を座標独立な物理変数として理論を構成する。

（3）計量関数の 1 階微分 $\partial_c g_{ab}$ の変換則とその性質

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ab}(x)}{\partial x^c} &= \frac{\partial}{\partial x^c} \left(\sum_{d,e=0}^{3} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{e'}}{\partial x^b} g_{d'e'}(x') \right) \quad \text{：}※\ \frac{\partial}{\partial x^c} g_{d'e'}(x') = \sum_{f=0}^{3} \frac{\partial x^{f'}}{\partial x^c} \frac{\partial g_{d'e'}(x')}{\partial x^{f'}} \\ &= \underline{\sum_{d,e=0}^{3} \left(\frac{\partial^2 x^{d'}}{\partial x^c \partial x^a} \frac{\partial x^{e'}}{\partial x^b} + \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^{e'}}{\partial x^c \partial x^b} \right) g_{d'e'}(x')} + \sum_{d,e=0}^{3} \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{e'}}{\partial x^b} \sum_{f=0}^{3} \frac{\partial x^{f'}}{\partial x^c} \underline{\underline{\frac{\partial g_{d'e'}(x')}{\partial x^{f'}}}} \end{aligned}$$

※ 表記の簡単化のため，次の記号を用いる。　$X^a_{b'} \equiv \dfrac{\partial x^a}{\partial x^{b'}},\ X^{a'}_b \equiv \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^b},\ X^{a'}_{bc} \equiv \dfrac{\partial^2 x^{a'}}{\partial x^b \partial x^c} = X^{a'}_{cb}$

- 係数関数 $X^{a'}_{bc}$ は計量関数 $g_{ab}(x)$ の変換則には寄与しない。
- $X^{a'}_{bc} = 0$ ならば <u><u>微分項</u></u> に対する <u>非斉次項</u> が消える。このときは $\partial_c g_{ab} = 0$ と $\partial_{c'} g_{a'b'} = 0$ が同値。

（4）準備：クロネッカーのデルタを含む式の計算方法

定義 クロネッカーのデルタ $\delta^a_b \equiv \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}$ ※ 添字文字に $'$ や $^-$ などが付くこともある。

・$\sum_{a=0}^{3} \delta^a_b \omega_a$: b が $0 \sim 3$ のどれかである限り，a が 0 から 3 まで変化する間に $a=b$ となるような a の値が 1 つだけある。 $\therefore \sum_{a=0}^{3} \delta^a_b \omega_a = \omega_b$ ※ 同様の考察より $\sum_{b=0}^{3} \delta^a_b A^b_{cd} = A^a_{cd}$，$\sum_{c=0}^{3} \delta^a_c \delta^c_b = \delta^a_b$，etc.

（5）局所慣性系とアインシュタインの等価原理

※ 計量関数の対称性：$g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$，$g_{a'b'}(x') = g_{b'a'}(x')$

定義 $(g_{ab})_p = \eta_{ab}$ と $(\partial_c g_{ab})_p = 0$ が共に成り立つ座標系 (x) を『時空点 p の局所慣性系』という。

定理 以下の手順で，任意に選ぶ時空点 p の局所慣性系が構成できる。 ※『慣性の法則』の修正案

- テトラードを用いて点 p の局所ローレンツ座標 (x') を構成し，$(g_{a'b'})_p = \eta_{a'b'}$ とする。
- その結果，$(\partial_{c'} g_{a'b'})_p \neq 0$ ならば次の座標変換 $(x') \to (x)$ により，$(\partial_c g_{ab})_p = 0$ が実現する。

$$\begin{cases} \cdot\, x^{a'} - x^{a'}_p = (x^a - x^a_p) - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{b,c=0}^{3} A^a_{bc}(x^b - x^b_p)(x^c - x^c_p) & \text{※ } A^a_{bc} = A^a_{cb} \text{ は下記の定数係数} \\ \cdot\, A^a_{bc} = A^a_{cb} \equiv \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{d=0}^{3} \eta^{a'd'} \Big(\partial_{b'} g_{c'd'} + \partial_{c'} g_{b'd'} - \partial_{d'} g_{b'c'} \Big)_p & \text{※ } (\eta^{a'd'}) \equiv (\eta_{a'd'}) = \mathrm{diag.}(-1,1,1,1) \end{cases}$$

$$\cdot\, X^{a'}_d \equiv \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^d} = \frac{\partial}{\partial x^d} \left\{ (x^a - x^a_p) - \frac{1}{2} \sum_{b,c=0}^{3} A^a_{bc}(x^b - x^b_p)(x^c - x^c_p) \right\} \quad \text{※ } \frac{\partial}{\partial x^d}(x^a - x^a_p) = \delta^a_d,\ \text{etc.}$$

$$= \delta^a_d - \frac{1}{2} \sum_{b,c=0}^{3} A^a_{bc} \left\{ \delta^b_d (x^c - x^c_p) + (x^b - x^b_p)\delta^c_d \right\}$$

$$= \delta^a_d - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{c=0}^{3} \left(\sum_{b=0}^{3} A^a_{bc}\delta^b_d \right)(x^c - x^c_p) + \sum_{b=0}^{3} \left(\sum_{c=0}^{3} A^a_{bc}\delta^c_d \right)(x^b - x^b_p) \right\}$$

$$= \delta^a_d - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{c=0}^{3} A^a_{dc}(x^c - x^c_p) + \sum_{b=0}^{3} A^a_{bd}(x^b - x^b_p) \right\} \quad \text{※ } \sum_{c=0}^{3} A^a_{dc}(x^c - x^c_p) = \sum_{b=0}^{3} A^a_{db}(x^b - x^b_p)$$

$$= \delta^a_d - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{b=0}^{3} A^a_{db}(x^b - x^b_p) + \sum_{b=0}^{3} A^a_{bd}(x^b - x^b_p) \right\} \quad \text{※ } A^a_{db} = A^a_{bd}$$

$$= \delta^a_d - \sum_{b=0}^{3} A^a_{bd}(x^b - x^b_p) \qquad \therefore \sum_{d=0}^{3} X^{a'}_d X^d_{c'} = \delta^{a'}_{c'} \text{ より，} (X^{a'}_d)_p = (X^a_{d'})_p = \delta^a_d \ \to\ (g_{ab})_p = (g_{a'b'})_p$$

$$\cdot\, X^{a'}_{cd} \equiv \frac{\partial}{\partial x^c} X^{a'}_d = \frac{\partial}{\partial x^c} \left\{ \delta^a_d - \sum_{b=0}^{3} A^a_{bd}(x^b - x^b_p) \right\} = -\sum_{b=0}^{3} A^a_{bd}\delta^b_c = -A^a_{cd} \qquad \therefore (X^{a'}_{cd})_p = -A^a_{cd}$$

$$\cdot\, (\partial_c g_{ab})_p = \sum_{d,e=0}^{3} \Big(X^{d'}_{ca} X^{e'}_b + X^{d'}_a X^{e'}_{cb} \Big)_p g_{d'e'}(x_p) + \sum_{d,e=0}^{3} \Big(X^{d'}_a X^{e'}_b \Big)_p \sum_{f=0}^{3} (X^{f'}_c)_p \left(\partial_{f'} g_{d'e'}\right)_p \quad \text{※ 変換公式}$$

$$= \sum_{d,e=0}^{3} \Big(-A^d_{ca}\delta^e_b - \delta^d_a A^e_{cb} \Big)_p \eta_{d'e'} + \sum_{d,e=0}^{3} \delta^d_a \delta^e_b \sum_{f=0}^{3} \delta^f_c \left(\partial_{f'} g_{d'e'}\right)_p$$

$$= -\sum_{d=0}^{3} \eta_{d'b'} A^d_{ca} - \sum_{e=0}^{3} \eta_{a'e'} A^e_{cb} + (\partial_{c'} g_{a'b'})_p \quad \text{※ } \sum_{d=0}^{3} \eta_{d'b'}\eta^{d'e'} = \delta^{e'}_{b'},\ \sum_{e=0}^{3} \eta_{a'e'}\eta^{e'd'} = \delta^{d'}_{a'}$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\partial_{c'} g_{a'b'} + \partial_{a'} g_{c'b'} - \partial_{b'} g_{c'a'} \Big)_p - \frac{1}{2}\Big(\partial_{c'} g_{b'a'} + \partial_{b'} g_{c'a'} - \partial_{a'} g_{c'b'} \Big)_p + (\partial_{c'} g_{a'b'})_p = 0$$

アインシュタインの等価原理 局所慣性系では特殊相対論が成り立つ。 ※ 特に，光線軌道では $ds^2 = 0$